FELIX CERNUSCHI

EXPERIMENTO, RAZONAMIENTO Y CREACION EN FISICA

EXPERIMENTO, RAZONAMIENTO Y CREACION EN FISICA

por

FELIX CERNUSCHI

Departamento de Astronomía y Física
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C. - 1969

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el
Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana

Editora: Eva V. Chesneau
Asesor Técnico: Dr. Mario Bunge
McGill University
Montreal, Canadá

A LOS LECTORES

El programa de monografías científicas es una faceta de la vasta labor de la Organización de los Estados Americanos, a cargo del Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de dicha Organización, a cuyo financiamiento contribuye en forma importante el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Concebido por los Jefes de Estado Americanos en su Reunión celebrada en Punta del Este, Uruguay, en 1967, y cristalizado en las deliberaciones y mandatos de la Quinta Reunión del Consejo Interamericano Cultural, llevada a cabo en Maracay, Venezuela, en 1968, el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es la expresión de las aspiraciones preconizadas por los Jefes de Estado Americanos en el sentido de poner la ciencia y la tecnología al servicio de los pueblos latinoamericanos.

Demostrando gran visión, tal altas autoridades reconocieron que la ciencia y la tecnología está transformando la estructura económica y social de muchas naciones y que, en esta hora, por ser instrumento indispensable de progreso en América Latina, necesita un impulso sin precedentes.

El Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es un complemento de los esfuerzos nacionales de los países latinoamericanos y se orienta hacia la adopción de medidas que permitan el fomento de la investigación, la enseñanza y la difusión de la ciencia y la tecnología; la formación y perfeccionamiento de personal científico; el intercambio de informaciones, y la transferencia y adaptación a los países latinoamericanos del conocimiento y las tecnologías generadas en otras regiones.

En el cumplimiento de estas premisas fundamentales, el programa de monografías representa una contribución directa a la enseñanza de las ciencias en niveles educativos que abarcan importantísimos sectores de la población y, al mismo tiempo, propugna la difusión del saber científico.

La colección de monografías científicas consta de cuatro series, en español y portugués, sobre temas de física, química, biología y matemática. Desde sus comienzos, estas obras se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de enseñanza secundaria y de los primeros años de la universitaria; de éstos se tiene ya testimonio de su buena acogida.

Este prefacio brinda al Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico y a la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos la ocasión de agradecer al doctor Félix Cernuschi, autor de esta monografía, y a quienes tengan el interés y buena voluntad de contribuir a su divulgación.

junio de 1969

INDICE

PROLOGO

En esta monografía se trata de indicar de manera clara (a partir de una reducida selección de temas simples y empleando un procedimiento histórico metodológico) la importancia relativa que, en la estructura de la física, tienen la observación y la experimentación; la elaboración de conceptos y de definiciones operacionales; la formulación de hipótesis y de teorías; la predicción de fenómenos no observados y de nuevos experimentos; la confrontación de los resultados teóricos con los experimentales.

Los datos resultantes de la observación y la experimentación son esenciales, imprescindibles, si bien no suficientes. La mera acumulación de resultados empíricos dista tanto de constituir una ciencia como, según la expresión de Henri Poincaré, el amontonamiento de ladrillos dista de ser un edificio. La física está constituida por un cuerpo altamente organizado y creciente de conocimientos y pensamientos, y es en su totalidad resultado de la actividad creadora y de la capacidad de razonar, observar y experimentar del hombre. ¿Hasta qué punto son las leyes científicas invenciones o creaciones en vez de descubrimientos? Todo esto es lo que nos proponemos explicar y discutir en estas páginas mediante algunos casos concretos. La física es la rama científica más evolucionada y, en consecuencia, la que más lejos se halla de la simple acumulación y clasificación de resultados empíricos. Teniendo en cuenta esto, Lord Rutherford solía decir que los que cultivaban la ciencia eran, o físicos o coleccionistas de estampillas. La palabra "ciencia" significa aquí ciencia de la naturaleza. La matemática y la lógica son ciencias formales, y la física abarca el estudio de todos los fenómenos y procesos de la naturaleza inanimada, y comprende, por lo tanto, la astronomía y la cosmogonía.

Esta monografía está destinada a los profesores de enseñanza secundaria con el objeto de contribuir y estimular en ellos el análisis crítico de la física, lo que es necesario para la comprensión de la misma. Si llegan a encontrar en ella algunas sugestiones útiles para el desarrollo de su enseñanza, nuestro propósito está totalmente satisfecho.

Debemos dejar expresa constancia de nuestro agradecimiento a la Prof. Srta. Elida Franceschi por su prolija labor de dibujar las figuras y de dactilografiar el manuscrito; y a ella y al Ing. Rubens Freire damos las gracias por haber leído, crítica y cuidadosamente, el manuscrito y por haber propuesto oportunas correcciones.

1

INTRODUCCION

La historia de la ciencia[10,17,45,57] está íntimamente relacionada con las luchas y trabajos que el hombre, desde sus orígenes, ha debido afrontar para sobrevivir, o sea para satisfacer sus necesidades materiales e intelectuales, mejorar sus condiciones de vida y acrecentar su conocimiento y comprensión del medio de que forma parte.

El desarrollo de las ideas y conceptos en el individuo sigue en parte un proceso similar al de su evolución histórica. Por tanto, es muy beneficioso para el proceso ontogenético de comprensión de la ciencia, el conocimiento filogenético, aunque abreviado, de la misma. Por este motivo, indicaremos, en sus aspectos más importantes, la evolución histórica de algunos de los conceptos básicos de la física. En cada caso que se considere, se puntualizará la base observacional o empírica que, como toda ciencia natural, tiene la física, y cómo, partiendo de datos derivados de la observación y la experimentación, el hombre de ciencia ha creado conceptos, procedimientos de medición, hipótesis y teorías que permiten, además de sistematizar los resultados ya obtenidos, predecir nuevos resultados observacionales o experimentales, cuya confirmación es necesaria para el mantenimiento de las correspondientes hipótesis y teorías. Como se verá, lo fundamental en ciencia son los hechos constatados por los sentidos y por los instrumentos creados para reforzar o suplir la capacidad sensorial. Cuando surge una contradicción entre lo que implica una teoría y los datos experimentales, es necesario modificarla.

El hombre prehistórico comenzó a explorar el medio ambiente en que vivía mediante la percepción sensorial y utilizando sus manos como herramienta básica. Así fue conquistando una valiosa información sobre las propiedades físicas de las cosas y substancias que encontraba en su ambiente, y por lo tanto, fue aprendiendo a emplearlas para fines útiles. En consecuencia, el empirismo físico es tan antiguo como el mismo hombre. La mera acumulación de datos sobre el mundo físico no implica un cuerpo de conocimientos positivos y útiles. Para obtener dicho cuerpo es necesario sistematizar estos datos, generalizarlos mediante la inducción y organizarlos con arreglo a hipótesis y teorías. Por supuesto, que en los primeros tiempos, esta sistematización e inducción era realizada de manera no programada; pero el mero amontonamiento de datos empíricos sin la fecundación de los mismos por la inventiva y el razonamiento del hombre, de poco le hubieran servido. Con los datos de su experiencia diaria y el fertilizante de su imaginación creadora, el hombre primitivo pudo construir otras herramientas y armas que hacían más eficaz el trabajo de sus manos, inventar el arco y la flecha, hacer chozas y balsas, descubrir procedimientos para producir el fuego y así permitir más tarde el comienzo de la metalurgia, inventar la rueda, la agricultura, la domesticación de animales, etc. Gracias a éstos y a muchos otros inventos y creaciones que fueron el resultado de una larga acumulación de datos empíricos y de la capacidad creadora del hombre, éste pudo abandonar la vida nómada y concentrarse en las primeras ciudades, a orillas de ríos, donde había tierras fértiles y en consecuencia apropiadas para la agricultura. Vemos, pues, que la incorporación a la vida en sociedad del hombre primitivo fue posible gracias a las técnicas surgidas de su empirismo, inteligencia y laboriosidad.

Las primeras civilizaciones que florecieron a orillas del Nilo, del Eufrates, del río Amarillo (en China), etc., fueron fruto de
4 muchos siglos de trabajos empíricos cuyos resultados, iluminados y fecundados por la inteligencia, permitieron al hombre llevar a cabo muchos e importantísimos inventos técnicos y definir conceptos cuantitativos, que constituyen el amanecer de las llamadas ciencias exactas.

Una vez establecido el hombre en agrupaciones humanas estables, surgen nuevas necesidades, entre ellas la de reemplazar algunos conceptos cualitativos por otros más precisos, es decir medibles. Surge así el comienzo de los procedimientos de medida. Nace la necesidad de especializar las distintas actividades productivas y, en consecuencia, el intercambio de productos. Esto a su vez reclama la creación de la aritmética. Además se hace necesaria la medida de la tierra y la predicción de las épocas propicias para sembrar y cosechar. La primera necesidad da origen a la geometría empírica, y la segunda, a la observación y estudios astronómicos. Es así como, muy esquemáticamente indicado, el hombre aprende a contar y a efectuar las primeras operaciones aritméticas, a medir longitudes y a determinar áreas, a medir el tiempo y a esbozar los primeros calendarios.

En un comienzo los datos empíricos eran, naturalmente, poco precisos y, por lo tanto, las ideas y conceptos elaborados a partir de ellos también lo eran. A medida que aumentó la precisión de las observaciones, se perfeccionaron los conceptos referentes al mundo físico y se pudo así crear teorías sobre la base de modelos matemáticos, cada vez más ajustados a la realidad del mundo que se deseaba describir, lo que permitió predecir los resultados de nuevos experimentos y observaciones en campos cada vez más amplios y con creciente precisión.

2

LA CIENCIA EN LA ANTIGÜEDAD

La geometría tuvo sus orígenes en la observación y en el estudio empírico de la forma de los cuerpos rígidos, lo que, después de siglos permitió inferir de la realidad objetiva un conjunto de postulados abstractos que sirvieron de base al edificio lógico elaborado por muchos eximios geómetras, cuyos aportes fueron recopilados en los famosos trece libros de Euclides (323-285 a. de J. C.). Tales (640-548 a. de J. C.) y Pitágoras (570-480 a. de J.C.) viajaron por Egipto familiarizándose con el saber empírico y las técnicas de este pueblo, e indudablemente divulgaron en Grecia las valiosas aplicaciones prácticas de geometría que poseían los egipcios. Tales, no sólo se preocupó del estudio e investigación de la geometría, sino también de problemas de topografía práctica. Casos como éste en el que el espíritu práctico y teórico se encontraban reunidos en una misma persona, se han dado con frecuencia en la cultura griega, aunque en ésta preponderó el amor por la especulación abstracta sobre el interés por la experimentación sistemática, y muchos filósofos griegos sentían hasta desprecio por los que se dedicaban a trabajos manuales.

Los primeros experimentos sobre las cuerdas vibrantes se atribuyen a Pitágoras y sus discípulos. Anaxágoras (499-428 a. de J. C.) fue el primer precursor del atomismo, teoría que fue luego difundida y ampliada por Demócrito (460-370 a. de J. C.). También en el siglo V antes de nuestra era vivió Hipócrates, "El Padre de la Medicina", quien se propuso descubrir, mediante la observación directa, la naturaleza y funcionamiento del cuerpo humano, en especial las reacciones de éste a los cambios de las condiciones de vida y alimentación, rechazando toda idea de divina interferencia.

La matemática llegó a alcanzar en Grecia un prestigio tal, que no se admitía que una persona que no supiese geometría pudiera dedicarse a la especulación filosófica; baste recordar la condición que Platón (428-347 a. de J. C.) imponía para ingresar en su famosa Academia: "Que no entre bajo mi techo quien ignore geometría". Aristóteles (384-322 a. de J. C.) fue, además de un brillante alumno de Platón, un hombre práctico, interesado en la investigación sistemática de los hechos y objetos naturales. Realizó amplias investigaciones sobre zoología, en especial sobre peces; fue ante todo un filósofo ansioso de clasificar tanto el saber de su tiempo como los objetos. Tenía en realidad la mentalidad de un naturalista, y se le considera el fundador de la biología; fue quien propuso la terminología científica más antigua que se conoce y el primero que levantó su voz contra las especulaciones idealistas de Platón y su escuela, y sostuvo que "los fenómenos no han sido suficientemente estudiados, pero cuando lo sean, se deberá prestar mayor atención a la experiencia que a la especulación". Este concepto de Aristóteles es de fundamental importancia, pues demuestra que tenía una idea clara de la función que la observación y la experiencia tienen en el avance de la ciencia, aunque, como se verá al referirse a Galileo, fueron precisamente los peripatéticos los que se oponían al renacimiento de la observación y la experimentación en física. Las obras de Aristóteles comprenden varios libros sobre física, astronomía, meteorología, mecánica, etc., además de numerosísimos escritos sobre biología y filosofía. Fue el fundador de la lógica; su obra tiene un carácter enciclopédico y en ella se encuentran condensadas muchas de las teorías y observaciones de sus predecesores. Sus estudios sobre física, si bien en parte denuncian a un agudo observador, por lo general están impregnados de conceptos metafísicos y por consiguiente de conclusiones falsas; sin embargo, toda su obra influenció la cultura durante unos dos mil años. En un libro atribuido a Euclides se encuentran ya las dos leyes de la reflexión de la luz, que fueron condensadas por Herón en una sola, según la cual el rayo luminoso al reflejarse sigue el camino más corto, lo que constituye un enunciado particular del famoso principio de Fermat. El primero a quien se atribuye la aplicación de la matemática a la mecánica es Arquitas de Tarento (428-327 a. de J. C.), un filósofo pitagórico, eximio matemático, profesor de Platón y honesto gobernante. Quien hizo importantísimos progresos en mecánica y a quien se considera el verdadero fundador de dicha disciplina científica es Arquímedes (287-212 a. de J. C.), uno de los hombres más geniales de la historia de la ciencia. Arquímedes estableció las leyes fundamentales de la estática, hizo importantísimos hallazgos en geometría así como notables contribuciones al álgebra y hasta anticipó los rudimentos del cálculo integral; por otra parte, formuló los principios de la hidrostática y fue un ingeniero genial.

La estática constituye otro simple ejemplo de teoría física, muy parecido al que hemos recordado a propósito de la geometría de Euclides. Como se verá más adelante en forma detallada, Arquímedes,[3] basándose en resultados empíricos obtenidos con la palanca, busca ciertos principios o hipótesis y definiciones de conceptos físicos que permitan deducir de ellos las leyes comprobadas experimentalmente. Arquímedes, a partir del principio de razón suficiente, que en su caso se reduce a un principio de simetría, y del concepto expresado por aquél, de centro de gravedad, dedujo la ley de la palanca que se comprueba experimentalmente.

En el siglo I antes de nuestra era vivió Herón de Alejandría, quien amplía los trabajos sobre mecánica y centros de gravedad de Arquímedes y realiza diversas invenciones mecánicas. Desde Herón hasta Stevino y Galileo, a fines del siglo XVI, la mecánica permanece estancada.

Conviene recordar que la astronomía adquirió también los caracteres de una ciencia exacta en Grecia, entre cuyos principales astrónomos se destaca Aristarco, quien vivió en el tercer siglo antes de nuestra era y concibió un método aproximado de determinar las distancias relativas entre el Sol, la Tierra y la Luna, el cual si bien no puede aplicarse hoy, por las imprecisiones de medida que implica, es digno en cambio de consideración debido al planteamiento astronómico correcto del problema y al riguroso razonamiento geométrico para resolverlo; fue quizás el primero en anticipar la teoría heliocéntrica. Eratóstenes (273-192 a. de J. C.), un ilustre astrónomo de la escuela de Alejandría, calculó la circunferencia de la Tierra a partir de la diferencia de latitud y de la distancia entre Syene y Meroe, lugares que se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Hiparco, célebre astrónomo y matemático que vivió en el siglo II a. de J. C., construyó un catálogo de unas mil estrellas fijas; después de muchos años de metódicas observaciones astronómicas y de hacer uso de bastante ingenio descubrió en 134 a. de J. C. la precesión de los equinoccios; además, no menos importante que su labor astronómica fue su contribución de carácter matemático, pues la tabla de cuerdas por él construida equivale a una tabla de senos naturales; definió un método para resolver triángulos esféricos; fue el primero en fijar la posición de un lugar sobre la superficie terrestre por su latitud y su longitud, y usó proyecciones estereográficas para construir mapas del cielo. Desde Hiparco hasta Ptolomeo, que vivió en el segundo siglo de nuestra era, la astronomía no hizo ningún progreso. Ptolomeo efectuó observaciones astronómicas entre los años 123 y 151 y resumió en trece libros los trabajos y conocimientos de sus predecesores; su famosa obra, que generalmente se conoce la traducción arabe de su título, Almagesto, no sólo es importante por su contenido astronómico, sino también por encontrarse expuesta y aplicada en ella, por primera vez, la trigonometría plana y esférica. Como es bien sabido, se debe a Ptolomeo la teoría geocéntrica, con órbitas excéntricas y movimientos epicicloidales, la que había de producir tan agrias discusiones muchos siglos más tarde. El Almagesto no se tradujo al latín hasta el año 1175, por Gerardo de Cremona. Ptolomeo realizó también importantes estudios y experimentos sobre la refracción de la luz y creyó que el cociente de los ángulos de incidencia y refracción era constante. Después de Ptolomeo no se registra ningún avance digno de mención en astronomía, en un período de unos mil años. Su teoría geocéntrica cumple los requisitos fundamentales de toda teoría científica. Sobre la base de datos de observación, formula ciertas hipótesis que permiten deducir nuevas conclusiones que pueden ser verificadas por la observación. La teoría de los epiciclos de Ptolomeo que, con el tiempo, se iba modificando para ajustarse mejor a los datos de la observación, permitía predecir con mucha exactitud la posición relativa de los miembros del sistema planetario en un momento dado. Ojalá que en nuestros días, la psicología y la sociología permitieran predecir hechos futuros con una precisión semejante. Siglos después, la teoría de Ptolomeo fue desplazada por la de Copérnico debido a que ésta se basaba en hipótesis que simplificaban mucho los cálculos, y a que permitía explicar un conjunto más amplio aún de fenómenos observables. Por razones similares, la teoría de Copérnico es más tarde superada por la de Kepler, ésta por la de Newton y, a su vez, ésta última por la de Einstein. El progreso científico es un encadenamiento a lo largo del tiempo y cada nueva teoría debe explicar, como mínimo, de manera más satisfactoria todo lo explicado por las anteriores.

Uno de los últimos grandes matemáticos de Grecia fue Apolonio (260-200 a. de J. C.), quien ordenó y enriqueció la geometría de las secciones cónicas. Pappus y Diofante de Alejandría, quienes vivieron entre los siglos III y IV de nuestra era, fueron los dos últimos grandes matemáticos de cultura griega. Entre las importantes contribuciones matemáticas que se le atribuyen a Pappus figuran las siguientes: que el volumen de un sólido generado por la revolución de una superficie plana alrededor de un eje coplanar pero exterior a ella, es igual al producto del área de dicha superficie por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad; y el área de una superficie generada por una curva plana al girar alrededor de un eje que yace en el mismo plano, es igual al producto de la longitud de la curva por el camino circular descrito por su centro de gravedad. Estos teoremas se atribuyen por lo general a Guldin debido a que este matemático los demostró también en 1641. Además Pappus es el primero en diferenciar las cinco máquinas simples: palanca, polea, torno, cuña y tornillo. La obra fundamental de Diofante, su Aritmética, es el primer tratado de álgebra donde se dedica especial atención a la solución de ecuaciones empleando símbolos algebraicos y métodos analíticos. Euclides había dado un método geométrico para resolver ecuaciones de segundo grado. Herón había resuelto el mismo problema algebraicamente, a pesar de no usar un simbolismo adecuado;

por consiguiente el álgebra de Diofante no constituye una invención repentina, sino el resultado de un continuado progreso.

No se hará mención aquí de ciertos estudios y trabajos relativos a la alquimia y la astrología por tener carácter místico y no científico. Alejandría, que fue durante los primeros siglos de nuestra era el centro intelectual del mundo, fue conquistada por los árabes en el año 641. Estos se interesaron muchísimo por la cultura griega y tradujeron al árabe sus principales obras, pero en general no hicieron avanzar en forma considerable el saber de los griegos; fueron instruidos, pero les faltó el genio creador de los griegos. En el siglo IX comienza a florecer la escuela de Bagdad, y los musulmanes, ya en plena posesión de la cultura griega e hindú, llegaron a ser los líderes intelectuales del mundo. Los moros, al invadir España, llevaron con ellos no sólo los gérmenes de su propia cultura, sino también la de los griegos y los hindúes. A éstos últimos se les debe importantes contribuciones en aritmética y álgebra. Uno de los principales científicos de la civilización islámica fue Al Hazen (965?-1038), quien escribió sobre astronomía, matemática y óptica. Es precisamente en óptica donde su labor científica alcanza gran valor. En efecto, realizó múltiples investigaciones acerca de la reflexión de la luz sobre espejos planos, esféricos y parabólicos; construyó un espejo con anillos esféricos separados, cuyos radios y centros habían sido elegidos de tal manera que todos los rayos luminosos, paralelos al eje del espejo, pasasen al reflejarse exactamente por un punto; repitió las experiencias de Ptolomeo sobre refracción y pudo constatar el error de éste al manifestar que el cociente entre el ángulo de incidencia y el de refracción era constante; pero al igual que Ptolomeo, no pudo formular la ley de la refracción correcta.

Por tres caminos diferentes las conquistas científicas de los griegos, de los árabes y de los hindúes se infiltran en Europa occidental: mediante la invasión de España por los moros; por lo que había quedado en el sur de Italia de la antigua cultura griega y por la corriente cultural de Constantinopla, a través de Italia. Estas infiltraciones fueron la causa principal de que, alrededor del siglo XII, comenzaran a notarse en Europa los primeros resplandores del nuevo amanecer científico.

Volvamos de nuevo al comienzo de nuestra era para recordar qué pasó en el campo de la ciencia en Europa occidental durante ese largo período que se llama la Edad Media. Como hemos visto, la ciencia fue un proceso activo hasta los primeros siglos de nuestra era. Los etruscos se distinguieron por sus trabajos de ingeniería; el arco (que se originó en Asia Menor), las bóvedas y los túneles fueron notablemente desarrollados por ellos. Los romanos, con su falta de amplitud intelectual, sus planes de conquista militar y su rústico materialismo, su exaltación del Estado y sus luchas contra los bárbaros, no pudieron interesarse por la cultura científica helénica. Pero sobresalieron por su espíritu práctico, por su oratoria y sus leyes, literatura e historia, si bien no demostraron ningún interés por la ciencia pura. A pesar de ello hubo romanos de gran cultura y agudo ingenio como Lucrecio (98-55 a. de J.C.) quien no sólo fue un poeta extraordinario, sino también un representante de la teoría atómica de los griegos, y parece que Newton encontró en el gran poema de Lucrecio, una clara exposición del principio de Galileo de la caída de los cuerpos: "En el vacío, libre de resistencia, todos los átomos, livianos y pesados, caen con igual velocidad".

Con el advenimiento del fanatismo religioso en Europa occidental, el espíritu de investigación científica recibió un golpe mortal. Los fanáticos religiosos hacían el siguiente razonamiento: si los libros de los filósofos y científicos griegos están de acuerdo con las Sagradas Escrituras, entonces no vale la pena leerlos, si están en contra hay que prohibirlos y quemarlos por heréticos. Clemente de Alejandría, en el siglo II, sostenía que los filósofos griegos eran unos ladrones que habían dado como cosas suyas lo que habían tomado de los profetas hebreos. Tertuliano (155-220) decía que la investigación científica era supérflua. San Isidoro (560-636), obispo de Sevilla, sostenía que un cristiano no debía leer libros de ciencia, pues con ello sólo se conseguía aumentar el orgullo en el alma. San Agustín desarrolla una teoría de evolución bajo el control divino. La Academia de Atenas fue clausurada por orden de Justiniano en el año 529 y desde entonces, durante toda la Edad Media, el estudio de los llamados libros paganos fue prohibido y toda la enseñanza tuvo un carácter netamente eclesiástico. En esa época, en vez de buscar la sabiduría en la libre crítica de los escritos de los antiguos y contemporáneos, en la observación, en la experimentación y en la especulación exenta de prejuicios, había que encontrarla en los llamados libros sagrados. Además, los libros paganos que habían conseguido salvarse se encontraban enclaustrados y sólo estaban al alcance de los monjes. Por suerte, para el progreso de la cultura, hubo religiosos animados por una genuina vocación por el saber verificable.

También conviene recordar que durante los últimos siglos de la Edad Media, la cultura científica de los árabes se fue entumeciendo al incrementar su fanatismo religioso.

A pesar de la oscuridad intelectual de Europa occidental, surgieron algunas mentalidades superiores animadas de un ansia de saber, superior a la presión anticientífica reinante y, por consiguiente, no pudieron resistir la tentación de estudiar los libros de ciencia del pasado. El más famoso intelectual de este grupo fue Boethius (480-524), quien escribió sobre filosofía, música y matemáticas; a él se debe en gran parte que se hayan preservado muchos de los conocimientos matemáticos de los griegos durante el período medioeval; por su fe, era cristiano, por su cultura, helénico, y fue "uno de los puentes entre la antigüedad y los tiempos modernos".

En el año 529 fundó San Benito su primer monasterio en Monte Cassino donde se daba importancia al trabajo útil. Este interés por lo práctico era una característica del espíritu romano, según hemos indicado y, como lo ha hecho notar el famoso matemático y filósofo Whitehead, "la alianza de la ciencia con la tecnología, por la que el saber se mantiene en contacto con los hechos irreductibles e inflexibles, debe mucho a las inclinaciones prácticas de los primeros benedictinos. La ciencia moderna deriva tanto de Roma como de Grecia".

La Edad Media, a pesar de los obstáculos que el fanatismo religioso puso al florecimiento del espíritu de libre crítica necesario para el desarrollo de la ciencia, fue una época de fermentación, y en el silencio de sus claustros se fueron elaborando hábitos de estudio y de meditación intelectual que contribuyeron al advenimiento del Renacimiento.

En el año 787, Carlomagno establece escuelas en cada monasterio de su imperio; pero las enseñanzas que en ellas se impartían tenían un carácter eminentemente teológico, con algunos complementos de literatura, música y matemática. Por los caminos que ya hemos indicado, los libros clásicos se fueron diseminando lentamente en Europa occidental. De la pugna del dogmatismo religioso con los escritos de Aristóteles surgió gradualmente en las escuelas de Carlomagno, durante la última parte de la Edad Media, el escolasticismo. El escolasticismo basaba todo conocimiento en la autoridad en vez del experimento, y fue por consiguiente hostil a la ciencia. Entre los siglos XI y XII aparecen las primeras universidades en Salerno, Bologna, París, Oxford y Cambridge. A pesar de que las universidades tuvieron durante los primeros siglos de su existencia un carácter netamente eclesiástico, fueron centros de estudio y meditación, donde se acumulaban libros y escritos sobre la ciencia antigua, y contribuyeron por lo tanto a preparar el ambiente propicio al Renacimiento.

Los escolásticos, como hemos recordado, creían poseer la visión real del universo y el conjunto de sus principios generales apriorísticos, y consideraban, por lo tanto, que los resultados de la observación y la experimentación eran simples ejemplificaciones de dichos principios. La actitud mental de los escolásticos era, pues, la opuesta a la que caracteriza a la ciencia; en efecto, ésta trata de llegar a la formulación de los principios que rigen a los procesos naturales, partiendo de la observación y la experimentación. Por lo tanto, los llamados hombres cultos en la Edad Media eran precisamente los principales enemigos de la ciencia. La lenta revolución intelectual que condujo al renacimiento científico en Europa occidental fue en cierto modo un movimiento "antiintelectual", que dudaba de los principios admitidos como ciertos e incitaba a partir de los crudos e inflexibles datos de la observación y la experiencia. Desde el siglo XI, con el aumento del intercambio comercial y del número de personas que disponían de tiempo para analizar los fundamentos de su fe y estudiar a los clásicos, comienzan a surgir profundas grietas en la estructura del escolasticismo, hasta poner en serio peligro su propia existencia al surgir el movimiento de la Reforma en el siglo XVI y, muy especialmente, a consecuencias de la rebelión científica que llega a adquirir un impulso incontenible con los trascendentales trabajos del genio incomparable de Galileo (1564-1642).[48]

Entre el comienzo de la nueva era científica, cuyo punto de partida se encuentra indiscutiblemente en Galileo, y la ciencia antigua, hubo, como ya hemos recalcado, primero un largo período caracterizado por un dogmatismo casi absoluto, y luego otro de fermentación y de preparación mental que hizo posible el advenimiento de la nueva era científica. Posiblemente durante la Edad Media no faltaron muchísimas personas con condiciones naturales para la observación y con dotes intelectuales excepcionales, quienes debido al clima intelectual de la época malograron sus talentos en estériles especulaciones. Ya hemos indicado que las universidades fueron también centro de meditación y de estudios desapasionados. Es precisamente de las universidades teológicas de donde salieron los más brillantes defensores del método científico y del libre pensamiento. No hay nada sorprendente en esto, puesto que las bibliotecas de esas universidades atesoraban en los clásicos los gérmenes del espíritu científico. Desde fines del siglo XI hasta fines del siglo XII se extiende el período de las cruzadas, las que contribuyeron en forma considerable a cambiar el panorama intelectual de Europa occidental debido a que muchos de los cruzados fueron después de su regreso, inconscientemente en muchos casos, elementos de propaganda de la cultura, civilización, costumbres, etc., que habían observado en sus expediciones.

Cada época y cada país poseen sus correspondientes atmósferas culturales, las que están integradas por lo que llamaremos elementos puros, es decir, aquéllos que son aceptados por la ciencia, y elementos tradicionales, muchos de los cuales pueden encontrarse en abierta contradicción con algunas conclusiones científicas. Ahora bien, "hombre culto", para la mayoría de sus contemporáneos, es aquél que, además de conocer los elementos puros de su época, defiende en forma elocuente los elementos tradicionales sin preocuparse de analizar objetiva y fríamente el valor de los mismos; el que se limita a cultivar la ciencia aceptada por su época sin interesarse por los ingredientes tradicionales de la cultura contemporánea es considerado un "bárbaro moderno", y el que se preocupa de puntualizar a la luz del método científico los errores contenidos en las llamadas "verdades tradicionales", un "rebelde peligroso". Las "verdades tradicionales" constituyen el conjunto de conocimientos obvios y, como lo ha hecho notar el famoso matemático y filósofo Whitehead, es necesario ser genial para analizar lo obvio. Pero en ciertas épocas no bastaba con ser genial para analizar las "verdades tradicionales", sino que era necesario tener el valor de afrontar las consecuencias desagradables que dicho análisis podría proporcionar. Difícilmente ha resultado esta labor más peligrosa que en la época de Galileo y sus predecesores inmediatos: por eso, al mencionar a los que echaron los cimientos de la nueva era científica no sólo debemos recordar la genialidad que se revela tan nítidamente a lo largo de sus trabajos, sino también el gran heroismo que debió animarlos para poner todos sus esfuerzos al servicio de la cultura de las generaciones futuras.

Antes de hacer algunas consideraciones sobre la importancia científica de la obra de Galileo, se mencionarán rápidamente los nombres de sus más ilustres precursores, quienes contribuyeron eficazmente a la elaboración de las ideas, procedimientos y conocimientos que Galileo necesitó para desarrollar su genialidad.

Quizás la primera actitud de rebeldía importante contra el escolasticismo, desde el punto de vista científico, sea la de Roger Bacon (1214-1294), un sacerdote franciscano que había estudiado en la Universidad de París y enseñado en la de Oxford. Roger Bacon enseñó que la única forma de verificar nuestros conocimientos era la observación y la experimentación. Sus libros fueron condenados y él fue condenado a prisión hasta un año antes de su muerte. Insistió en que la ciencia natural debe tener una base experimental y que la astronomía y la física deben fundarse en la matemática, "el alfabeto de toda filosofía".

En el norte de Italia se prefecciona a fines del siglo XII la fabricación de lentes, de tan importante papel en el futuro de la ciencia, y se inventan los anteojos.

El papel, cuya elaboración ya se conocía en Europa desde fines del siglo XII, se convierte, con la invención de la imprenta en el siglo XV, en el principal vehículo de la cultura clásica, facilitando el estudio y la fermentación de nuevas ideas e inquietudes, al mismo tiempo que asegura la supervivencia de las conquistas intelectuales de la humanidad.

Ya en el siglo XIII se comienzan a sentir los primeros síntomas del Renacimiento, el que llega a su apogeo en los siglos XV y XVI. La figura más sobresaliente de este período, desde el punto de vista científico, fue Leonardo de Vinci (1452-1519), el genio más característico del Renacimiento italiano e igualmente eminente en arte, ciencia e ingeniería. Leonardo consideraba la mecánica el paraíso de la matemática, porque por medio de aquélla se obtienen los primeros frutos de ésta. Tartaglia (1500-1557), brillante matemático, físico y filósofo, anticipose a Galileo enseñando que cuerpos de diferente peso recorren, al caer, distancias iguales en tiempos iguales. Mercator (1512-1594), con su primer mapa del mundo, marca el comienzo de una época en cartografía. Vesalius (1514-1564), anatomista belga, mediante el empleo del método experimental, revoluciona conceptos de la medicina que habían permanecido estacionados desde los tiempos de Hipócrates y Galeno. Uno de los más inmediatos precursores de Galileo fue Copérnico (1473-1543), el tranquilo y estudioso eclesiástico y médico polaco que había estudiado matemática en Bologna, Padua y Roma, y quien, después de treinta años de trabajo metódico de compilación de tablas y cálculos numéricos, consigue demostrar que todos los movimientos observables del sistema solar se pueden interpretar en forma sencilla a partir de la hipótesis de que la Tierra, como los demás planetas, gira alrededor del Sol. Toda su labor fue publicada en su único libro "*De Revolutionibus Orbium Coelestium*" que apareció cuando su apacible autor dejaba de existir tal vez sin sospechar que su libro originaría las más acaloradas polémicas científicas que registra la historia.

El caso de Copérnico sirve para comprobar como un hombre sin dotes extraordinarias de inteligencia puede producir trabajos científicos de trascendental valor después de años de metódica y continuada labor.

Los imanes y algunas de sus propiedades eran ya conocidas por Tales de Mileto, pero el estudio científico del magnetismo no se inicia hasta Gilbert (1544-1603), un brillante experimentador en el campo de la física. Tycho Brahe (1546-1601) dotó a la astronomía moderna del magnífico sistema observacional que la caracteriza y determinó la posición de los planetas y de gran número de estrellas con una aproximación que maravilla, si se tienen en cuenta los instrumentos por él utilizados. A pesar de sus brillantes condiciones de observador, en su espíritu se encontraban muchos resabios del antiguo misticismo, lo que lo llevó a creer en la astrología y a desechar el sistema de Copérnico. Simón Stevin (1548-1620) es, con respecto a la historia de la mecánica, el precursor inmediato de Galileo; su tratado sobre estática e hidrostática (1586) contiene los primeros progresos verdaderos de dicha ciencia desde Arquímedes, dieciocho siglos antes. Llegó al siguiente resultado respecto a un sistema de poleas en equilibrio: "el producto de los pesos por sus desplazamientos respectivos es igual"; resultado que equivale implícitamente al principio de los trabajos virtuales.

Durante los siglos XV y XVI se hacen en Italia muchos inventos, especialmente por hombres prácticos que se habían formado, no en las universidades, sino en el trabajo cotidiano de sus respectivos oficios. Como consecuencia de un empirismo resultante de una actividad manual y práctica y de hallazgos, producto de la observación casual, se llegó, entre otras cosas, a la fabricación del papel, la brújula, la pólvora y armas de fuego, la prensa, ventiladores de minas, nuevos procedimientos de construcción de puentes, canales, edificios, barcos, lentes, etc. Los artesanos eran menospreciados en la Edad Media por la clase considerada culta; pero el empirismo de los hombres prácticos, aún desprovisto de toda metodología, no sólo fue la base de múltiples invenciones de los siglos XV y XVI, sino de la metodología de la ciencia experimental, la que a su vez da origen a la ciencia moderna. De entre los artesanos de mayor talento surgieron los llamados artistas-ingenieros, entre los que se halla Brunelleschi (1377-1446) constructor de la cúpula de la catedral de Florencia; el ingeniero y arquitecto Giorgio Martini (1425-1505); Leonardo de Vinci (1442-1519); el escultor, constructor de armas, orfebre y grabador Benvenuto Cellini (1500-1571), etc.

Los gérmenes del método experimental se encuentran, como hemos indicado, en los trabajos de los artesanos de mayor capacidad y talento, quienes, en su mayoría, eran considerados incultos según los cánones de la época. La ciencia moderna nace, como veremos, al formarse la magnífica y fecunda simbiosis del empirismo de los hombres prácticos con la capacidad de abstracción y de razonamiento.

El siglo XVII, el siglo de la genialidad, como lo llama con mucho acierto Whitehead, se inicia con los resplandores de la hoguera de la Inquisición que quemó a Bruno (1548-1600), un filósofo italiano que pertenecía a la orden de los dominicanos y que tuvo la osadía de publicar una exposición en defensa del sistema de Copérnico y de querer analizar algunos fundamentos de su propia fe.

La expansión de los viajes y los descubrimientos geográficos contribuyeron considerablemente a desterrar viejos prejuicios del escolasticismo y a acelerar el progreso de la técnica y el advenimiento de la ciencia moderna. Uno de los precursores más conocidos del método científico es Francis Bacon (1560-1626), famoso filósofo inglés que se dedicó con gran habilidad literaria a defender su aplicación y a sostener que solamente partiendo de la experiencia se puede llegar a la verdad. Es indudable que a él se debe en gran parte la divulgación del método científico en su época, a pesar de no ser él un investigador. Su contemporáneo, el famoso Harvey (1578-1657), descubridor del mecanismo de la circulación de la sangre, solía decir refiriéndose a Bacon: "El Lord Canciller escribe sobre ciencia como un Lord Canciller".

Después de esta brevísima síntesis de los principales rasgos de la ciencia en la antigüedad, pasaremos a analizar la concepción y evolución de algunos importantes conceptos e hipótesis físicas a partir de la observación y de los datos experimentales.

3

GEOMETRIA FISICA Y GEOMETRIA ABSTRACTA

Se ha mencionado ya que la geometría, como su nombre indica (medida de la Tierra), tuvo sus orígenes en un empirismo físico. Basándose en los múltiples resultados prácticos obtenidos por los egipcios, los griegos construyeron un conjunto de axiomas a partir de los cuales pudieron llegar a conclusiones o teoremas que justificaron no sólo todos los resultados ya conocidos de los egipcios por el método del "ensayo y error" sino que, además, permitieron descubrir un vasto campo del saber geométrico, cuya validez se podía comprobar experimentalmente dentro del límite de error de las mediciones físicas.

1. GEOMETRIA EUCLIDIANA

La formulación de la geometría de Euclides constituye un caso concreto de enunciado de una teoría física. Los resultados de la geometría empírica de los egipcios llevaron a la concepción de los axiomas de la considerada geometría. Por inferencia lógica se deducen, a partir de los axiomas, los teoremas. Las definiciones, mediante operaciones físicas, de punto, recta, plano, etc., permiten establecer una correspondencia entre las figuras abstractas de la geometría y las correspondientes figuras físicas. Por ejemplo, entre un triángulo abstracto, construido mentalmente de acuerdo con los axiomas de la geometría de Euclides, y un triángulo físico construido con tres varillas rectas, o dibujado en el pizarrón mediante tres rectas trazadas con tiza y que, por lo tanto, no pueden ser estrictamente unidimensionales. Esta correspondencia no puede ser perfecta, puesto que es imposible construir figuras físicas que representen con absoluta exactitud las correspondientes figuras geométricas abstractas. Consecuentemente, es natural que los resultados expresados por los teoremas de la geometría euclidiana sólo puedan verificarse experimentalmente de manera aproximada. Por ejemplo, en la geometría euclidiana, la suma de los ángulos internos de un triángulo es exactamente 180°; si construimos triángulos físicos y medimos sus ángulos con un transportador, obtendremos resultados que, en general, discrepan del valor indicado. Las diferencias entre el valor teórico y los obtenidos experimentalmente se deben a los errores inevitables de toda física, y también a que los triángulos físicos considerados no coinciden exactamente con los triángulos abstractos de la geometría. Desde la antigüedad hasta el nacimiento de las geometrías no-euclidianas los axiomas eran considerados verdades cuya validez no necesitaba demostración; su condición de verdaderos dependía de la intuición y la razón, y no de la observación y la experimentación. Esta interpretación llevó a muchos famosos pensadores y filósofos a considerar que la observación y la experimentación no eran necesarias para comprender el mundo físico; era necesario descubrir los principios claros y evidentes de nuestra razón e intuición para formular sobre esa base teorías matemáticas que permitieran deducir las leyes de la naturaleza, a manera de teoremas. Esta forma de filosofar menospreció la observación y la experimentación, y en consecuencia, frenó el progreso científico.

2. AXIOMA DE LAS PARALELAS

Los principios que resultan evidentes a la luz de la intuición y la razón, o sea evidentes por sí mismos, son en realidad, como lo declarara John Stuart Mill en 1843, verdades experimentales, generalizaciones de observaciones. Lo que nos resulta evidente del mundo exterior es resultado de un gran número de observaciones. Así, por ejemplo, el axioma de las paralelas de la geometría de Euclides, no es el resultado de la intuición o de la naturaleza del razonamiento, sino una generalización de un sinnúmero de experiencias que, desde la niñez, hemos efectuado consciente o inconscientemente en nuestra vida cotidiana.

Fueron necesarios muchos siglos para llegar a comprender que el axioma de Euclides, según el cual desde un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una recta coplanar y paralela a la primera, tenía un origen empírico y, en consecuencia, no era inherente a la naturaleza del razonamiento humano como lo sostuvieron tantos filósofos eminentes (Descartes, Kant, etc.). Cuando se comprendió que tenía una base empírica y que era independiente de los otros postulados de la geometría de Euclides, quedó abierto el camino hacia la formulación de las geometrías no euclidianas.[37,56,65] Si el postulado de las paralelas era independiente de los otros postulados de la geometría de Euclides, podía ser cambiado por otro que lo negara sin que se produjera en el desarrollo lógico contradicción alguna. En la primera mitad del siglo pasado Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), en Rusia, y Johann Bolyai (1802-1860), en Hungría, establecieron los fundamentos de una geometría no euclidiana reemplazando el axioma de las paralelas por otro que expresa que, en un plano no euclidiano, desde un punto exterior a una recta se pueden trazar muchas rectas que no la cortan. En Alemania, Bernard Riemann (1826-1866) creó otra geometría no euclidiana reemplazando el axioma de las paralelas por el que sostiene que, en un plano no euclidiano, desde un punto exterior a una recta no se puede trazar paralela alguna a dicha recta.

3. GEOMETRIA DE RIEMANN

La geometría de Riemann se cumple, por ejemplo, sobre una esfera. En efecto, la distancia mínima entre dos puntos de una superficie esférica es la medida del arco menor del círculo máximo que pasa por ellos. El plano no euclidiano, en este caso, es la superficie esférica y las rectas (vale decir, las líneas que representan el camino más corto) son círculos máximos. Como todos los círculos máximos en una esfera se cortan, resulta que sobre su superficie, desde un punto exterior a un círculo máximo no se puede trazar otro que no lo corte. Por lo tanto, con las aclaraciones hechas, vemos que sobre la esfera se cumple el postulado de Riemann. A quien no haya pensado sobre las geometrías no euclidianas, puede resultarle lo dicho ahora algo extraño y contrario a la intuición. El axioma de Euclides de las paralelas es sugerido, como hemos indicado, por la experiencia cotidiana en el ambiente físico que nos rodea. La geometría euclidiana es pues una teoría física referente a la posición, forma, superficie y volumen de los cuerpos que se encuentran en el espacio físico de nuestra experiencia.

Los axiomas de la geometría deben ser independientes unos de otros, no contradictorios entre sí y, en conjunto, ser suficientes para deducir teoremas o conclusiones. Los conceptos de la geometría pura están definidos por los propios postulados, los que no necesitan ser intuibles para nosotros sino, repetimos, no contradictorios y suficientes. Las geometrías puras son estructuras formales, cuyas conclusiones son lógicamente lícitas de acuerdo con sus axiomas. Para que una geometría sea verdadera desde el punto de vista físico, se debe definir operacionalmente el nexo entre los elementos geométricos definidos a partir de los postulados y la realidad física. Así, por ejemplo, definimos físicamente una línea recta que une dos puntos por un hilo elástico extendido entre ellos, o por la trayectoria de un rayo luminoso que pasa por ellos; un punto, por la intersección de dos hilos elásticos o de dos rayos luminosos, etc. Con estas definiciones, convertimos una geometría pura en teoría física que se puede verificar experimentalmente; es decir confirmar o no por la observación, por la experimentación, o por ambas. Describiremos ahora un mundo imaginario en el que la geometría de Riemann fuera para sus seres inteligentes tan intuitiva como la geometría euclidiana lo es para nosotros. Nada mejor, en tal sentido, que parafrasear al propio Einstein. Supongamos un mundo esférico poblado por seres bidimensionales que pueden moverse libremente sobre la superficie esférica correspondiente, pero que no tienen noción alguna de la tercera dimensión. A estos seres los supondremos inteligentes y capaces de efectuar en su medio mediciones con cintas métricas y experimentos con instrumentos bidimensionales. El mundo que pueden ellos observar se reduce a la superficie esférica en que viven. ¿Qué geometría física podrían construir? Esta, ciertamente, no será la euclidiana. En efecto, después de múltiples observaciones y experimentaciones encontrarán que la línea recta (la mínima distancia entre dos puntos) para ellos es el círculo máximo; que dada en su medio una recta (es decir un círculo máximo) y un punto exterior, todas las rectas (vale decir, círculos máximos) que yacen en su medio cortan a la primera. Por consiguiente, estos seres en vez de llegar a considerar intuitivo el postulado de las paralelas de Euclides, concebirán como intuitivo y obvio que desde un punto exterior a una recta no se pueda trazar paralela alguna a la primera. Los seres bidimensionales que habitan la referida esfera llegarán (primero empíricamente y luego axiomáticamente, a partir de un conjunto de postulados o axiomas que les resultarán evidentes por sí mismos o verdades inherentes a la naturaleza de la mente) a descubrir, por ejemplo, que la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor de 180° (véase Fig. 1).

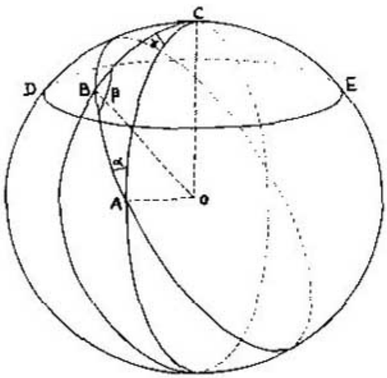


Fig. 1

A,B,C son los vértices de un triángulo esférico. Se demuestra fácilmente que la suma de los ángulos internos es mayor que π($\alpha + \beta + \gamma > \pi$).

El arco CD es el radio del círculo DE, medido por los seres bidimensionales cuyo espacio físico es la esfera.

4. GEOMETRIA DE LOBACHEVSKY

Análogamente, pasemos a describir en forma esquemática un hipotético mundo físico que responda a la geometría de Lobachevsky. Para tener una imagen objetiva de tal medio físico, supongamos una lámina circular de un material imaginario que mantenga su solidez a cualquier temperatura por elevada que sea, y que tenga una ley de dilatación lineal en función de la temperatura. Consideremos el referido disco metálico, cuyo límite es el círculo C. Tracemos el segmento AB (Fig. 2). Desde un punto exterior a éste y en el medio interior limitado por C, tomemos un punto P. Los segmentos PB y PA se cortan en los puntos límites del segmento AB. Todas las rectas que pasando por P se encuentran en

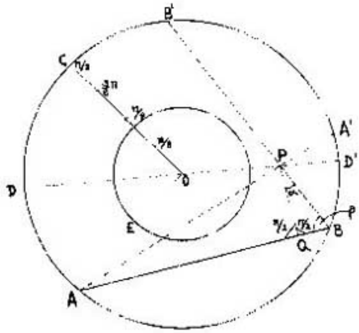


Fig. 2

OC es el radio de un disco metálico que supuestamente puede dilatarse indefinidamente aplicando una distribución de temperatura que crece de cero grado absoluto en el punto O a infinito, a medida que se acerca al límite C.

Sea AB una recta cualquiera. PB y PA se convertirán, después de la expansión, en dos rectas paralelas a la AB. Toda recta que pase por P y esté comprendida en el ángulo A'PB, como la DD', será no secante de la recta AB. OE es el radio de un círculo interior al C.

el ángulo A'PB serán no secantes, o sea que no cortan al segmento AB. Para tener una imagen intuitiva de la geometría de Lobachevsky, supongamos que al radio R del círculo C le hacemos corresponder en una cierta escala el valor $\frac{\pi}{2}$ (Fig. 2) y que ahora le aplicamos a cada punto del disco metálico una temperatura que depende de su distancia al centro, según la siguiente ley: $T = \tan kR$, donde k es una constante de dimensión L^{-1}. Por lo tanto, a medida que nos alejamos del centro la dilatación será mayor, y cuando lleguemos al borde C, la dilatación será infinita puesto que $\tan kR = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$. El círculo metálico se habrá extendido hasta el infinito, lo mismo que las distintas rectas que se pueden trazar dentro del borde C. La nueva superficie ya no será plana, como es fácil de demostrar para un observador que, como nosotros, viva en un espacio tridimensional y euclidiano; análogamente, para este observador, las transformadas de las rectas en el interior del borde C (Fig. 2) también dejarán de ser líneas rectas. Si imaginamos que en la superficie obtenida por un proceso similar al indicado habitan seres inteligentes que pueden efectuar mediciones y experimentos, constatarán que, desde un punto exterior, P, a una línea recta AB de su medio (es decir, la que representa la menor distancia entre dos puntos de su medio físico) se pueden trazar dos paralelas distintas (las transformadas de los segmentos PA y PB) a la recta considerada; y que dichas paralelas limitan el ángulo dentro del cual pueden trazarse infinitas rectas no secantes a la dada.

Veamos una conclusión sencilla e importante de la geometría de Lobachevsky. Tracemos desde P una perpendicular a la recta AB. Después de transformado el disco de la figura 2 por el procedimiento citado, el punto B se confunde con el punto en el infinito de dicha recta; el segmento PB en la paralela a AB, el ángulo $\beta \to 0$ cuando $R \to \infty$; por el proceso de transformación es fácil ver que los ángulos en P y Q del triángulo PQB se conservan; y como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, tenemos que en la geometría de Lobachevsky, cuando uno de los vértices tiende a infinito, la suma de los ángulos internos es menor que π.

Como ejercicios para el lector demostrar que: a) en el caso de la geometría de Riemann, que hemos considerado (Fig. 1), la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que dos rectos; b) llamando exceso de un triángulo esférico a la suma de los tres ángulos internos menos π, la superficie del mismo es igual al exceso multiplicado por el cuadrado del radio de la correspondiente esfera; c) si los geómetras empíricos bidimensionales en un mundo esférico trazan círculos (Fig. 1), la relación entre la longitud del círculo y la del radio correspondiente, medidos, por supuesto, sobre la esfera, es menor que 2π; d) si análogamente los seres bidimensionales que vivan en un plano de Lobachevsky trazan círculos con centro 0, figura 2, la relación que ellos encontrarán entre la longitud de un círculo y la del radio correspondiente será mayor que 2π.

Hemos visto que la suma de los ángulos internos de un triángulo vale, en la geometría euclidiana π, en la de Riemann más de π y en la de Lobachevsky menos de π.

5. GEOMETRIA Y FISICA

Es indudable que el espacio físico de nuestra experiencia diaria se representa muy satisfactoriamente por la geometría euclidiana, pero si construimos triángulos muchísimo más grandes que los que podemos construir con varillas, ¿se seguirá verificando que el espacio físico sea euclidiano?[30, 37, 56]

La primera comprobación experimental la hizo Gauss (1777-1855), midiendo los ángulos de un triángulo determinado por tres picos de montañas, cuyas distancias eran de varias decenas de kilómetros. Encontró que la diferencia entre la suma de los ángulos internos del triángulo así determinado y 180° estaba dentro del error observacional de las medidas. Cabe todavía la duda con respecto a triángulos cuyos lados sean muchísimo más grandes aún. Así, por ejemplo, si tomamos como base de un triángulo el diámetro de la órbita de la Tierra en torno al Sol, la paralaje (el ángulo bajo el cual se ve dicho diámetro) de una estrella muy lejana sería, como sigue de las consideraciones hechas, positiva si el espacio cósmico correspondiera a la geometría de Lobachevsky, negativa si fuera riemanniano y casi nula si el espacio en la escala cósmica fuera euclidiano. De acuerdo con la teoría general de la relatividad de Einstein, el espacio sería riemanniano, es decir curvo. El exceso esférico Δ, multiplicado por el cuadrado del radio de curvatura de la esfera es igual al área del triángulo esférico, es decir $\Delta \cdot r^2 = S$, o sea $\frac{\Delta}{S} = \frac{1}{r^2}$. A este cociente se llama curvatura de la superficie esférica. En un espacio curvado tridimensional se pueden imaginar superficies y construir sobre ellas triángulos físicos cuyos lados estén determinados por rayos luminosos. Al medir los ángulos internos de estos triángulos, si se constata que hay un exceso con respecto al valor π, diremos que nuestro espacio es curvo.

4

EMPIRISMO Y RAZONAMIENTO EN ESTATICA

Hemos visto que, primero, el hombre aprendió empíricamente a medir longitudes, superficies y ángulos y a relacionar los elementos que limitan figuras planas, y sobre esa base empírica, los griegos establecieron la axiomatización de la geometría. Es natural que así haya acontecido, pues lo más sencillo de medir y de estudiar son, por cierto, las relaciones geométricas. La estática, que estudia el equilibrio de cuerpos sólidos y fluidos sometidos a la acción de fuerzas, es natural que sea la rama más antigua de la mecánica, pues el análisis y medición de los procesos cambiantes de la dinámica son relativamente mucho más complejos.

Los egipcios y los babilonios conocían de manera empírica los principios más importantes de la estática, pues de no ser así no hubieran podido construir las pirámides y los templos. Por la necesidad de levantar y mover pesos superiores a las posibilidades de sus músculos, el hombre, muy posiblemente mediante el empleo inconsciente del método de ensayo y error, inventó las primeras máquinas simples: la palanca y el plano inclinado. En la antigüedad se llamaba máquina simple a todo dispositivo que permitía utilizar la fuerza del hombre de una manera más ventajosa. Seguramente de manera empírica descubrió, por ejemplo (véase Fig. 3), que una gran piedra A, que no podía ser movida por la sola acción de sus brazos y músculos, se podía mover por medio de un palo que se apoyara en el punto B de la piedra y en el punto C de una pequeña piedra apoyada en el suelo, y aplicando su esfuerzo en el extremo D, siempre que la distancia b fuera más pequeña que la a. Mediante diversas pruebas y ensayos programados de

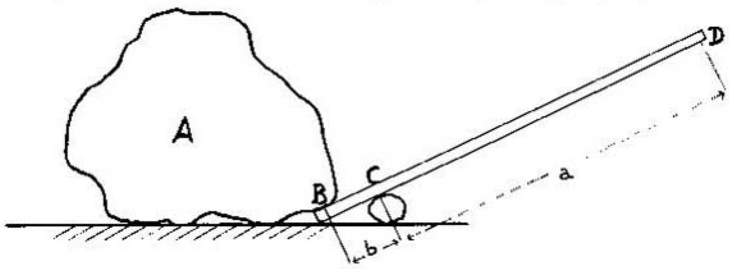


Fig. 3

modo no sistemático, el artesano en la antigüedad aprendió empíricamente que cuanto menor es la distancia b con respecto a la distancia a, tanto más eficiente resulta su esfuerzo aplicado en D. En forma análoga debe haber descubierto las ventajas del plano inclinado, torno y polea para elevar cuerpos pesados. Es indudable que los primeros pasos en el proceso científico se deben a la laboriosidad, curiosidad e inteligencia de los antiguos obreros manuales.

1. LEY DE LA PALANCA

La figura 4 muestra un simple dispositivo que puede ser construido en cualquier colegio por los propios alumnos con pocas herramientas, y con el cual se puede determinar experimentalmente la ley de la palanca.* Para ello se supone que el peso de la varilla

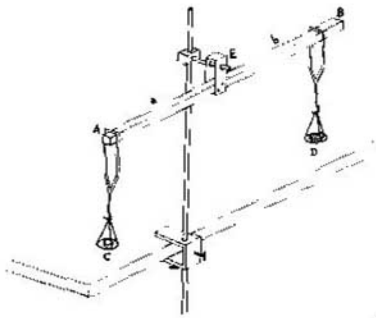


Fig. 4

de madera AB es despreciable en comparación con los pesos que se colocan en los platillos C y D; se deja fijo el peso P_a que se coloca en uno de los platillos, a distancia a del punto de apoyo E de la palanca y, para distintas posiciones b del segundo platillo, se determina experimentalmente el peso P_b que equilibra a la palanca. Se tabulan los resultados y se verifica que, al aumentar la distancia b, P_b disminuye de tal manera que se cumple la relación:

$$P_a \cdot a = P_b \cdot b \qquad [1]$$

Esta ley tan sencilla ha dado origen a múltiples invenciones: balanza, pinzas, tijeras, torno, poleas, cascanueces, etc. Es interesante hacer en torno a esta ley algunas consideraciones sobre

---

* En el libro "Enseñando Física Mediante Experimentos", por Félix Cernuschi y Emilio Signorini (Editorial Eudeba, Buenos Aires, Argentina), se describen múltiples dispositivos sencillos para experimentación en física.

la diferencia y la relación entre descubrimiento científico e invención tecnológica.

2. DESCUBRIMIENTO E INVENCION

Física es la ciencia que se ocupa de estudiar el comportamiento de la materia inanimada en distintas condiciones debidamente especificadas y de determinar sus correspondientes leyes. La ley de la palanca es quizás la más simple de tales leyes. La invención tecnológica resulta de la aplicación de una o varias leyes para crear un dispositivo que cumpla ciertas funciones prácticas, como las invenciones derivadas de la ley de la palanca que hemos indicado. Esta relación entre descubrimiento científico e invención tecnológica ocurre siempre y por eso es tan importante la investigación científica para el desarrollo de la tecnología. Los múltiples, magníficos y utilísimos inventos de nuestra era nuclear, la electrónica, los vehículos espaciales teledirigidos, etc., son consecuencia de la acumulación de conocimientos científicos de otras épocas y de nuevas conquistas en el campo de la ciencia pura. A menudo la invención práctica precede el descubrimiento de la correspondiente ley; por ejemplo, la ley de la palanca fue formulada por Arquímedes después que los obreros habían utilizado la palanca durante siglos; las bombas para elevar agua también existieron mucho antes que Torricelli descubriera la ley de su funcionamiento. Pero, a medida que la ciencia y la técnica avanzan, se hace cada vez menos probable que se produzca una invención sin el previo conocimiento de la ley o las leyes científicas que explican su funcionamiento. Es por esto que en el presente es necesaria la investigación científica para garantizar el progreso tecnológico.

3. CENTRO DE GRAVEDAD

A Arquímedes se debe el concepto de centro de gravedad. Imaginemos un cuerpo sólido subdividido en pequeños volúmenes, en que en cada uno de ellos actúa perpendicularmente hacia abajo una fuerza proporcional al peso de la materia encerrada en el mismo, que representaremos por un vector. Sea R la resultante de todas estas fuerzas paralelas. Si hacemos girar el cuerpo con respecto a un eje horizontal y si determinamos el vector resultante R' de los vectores paralelos correspondientes a esta nueva posición, la intersección de R y R' define el centro de gravedad del cuerpo. Si suspendemos el cuerpo considerado en dicho centro, éste estará en equilibrio en cualquier posición que se le coloque, puesto que la resultante de todos los pesos elementales integrantes del total siempre pasa por el mismo punto G. En consecuencia, el centro de gravedad de un cuerpo es un punto tal que el peso total del cuerpo puede considerarse concentrado en él.

Experimentalmente es muy fácil determinar el centro de gravedad de un sólido. Tomemos, por ejemplo, un trozo de cartón de forma cualquiera (Fig. 5). Se sostiene el cartón por un clavo que pase por el agujero A. Se determina la recta de acción del vector R, resultante del peso total; se suspende luego el cartón de otro punto cualquiera B y se determina análogamente la posición de la resultante R'. Con una plomada se dibujan ambas rectas sobre el cartón. La intersección de ambas da la posición del centro de gravedad G. Luego es fácil constatar que si se sostiene el cartón por medio de un clavo que pase por un agujero efectuado en G, el cuerpo estará en equilibrio indiferente; es decir, cualquiera sea el ángulo de giro del cartón en torno al eje que pasa por G, estará en equilibrio.

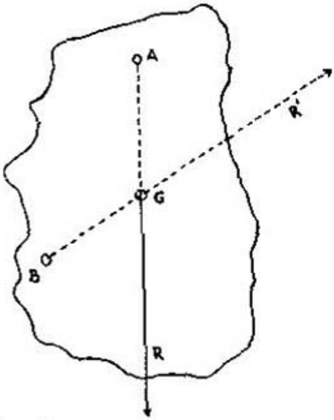


Fig. 5

4. EL PRINCIPIO DE RAZON SUFICIENTE Y LA DEDUCCION POR ARQUIMEDES DE LA LEY DE LA PALANCA

Arquímedes se propuso deducir la ley de la palanca, que ya hemos citado, a partir de un principio inteligible, es decir, claro en sí mismo, cuya validez pudiera ser intuida directamente. Estos "principios inteligibles"[27] responden más a una necesidad de carácter psicológico que científico. En realidad, los conceptos e hipótesis necesarios para elaborar una teoría son concebidos por el científico. Las leyes científicas se justifican sólo mediante su confrontación con los resultados de la observación.

Arquímedes razonaba de la manera siguiente. Tomemos, por ejemplo, una varilla prismática, AB (Fig. 6) de sección rectangu-

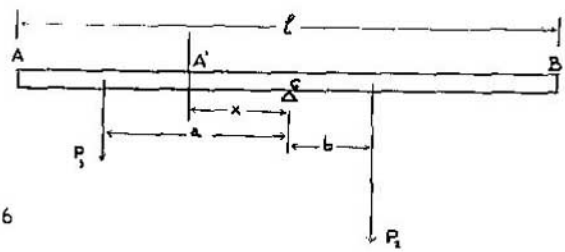


Fig. 6

lar y de material homogéneo. Si la sostenemos sobre un punto C, equidistante de A y B, la varilla estará en equilibrio, puesto que no hay razón alguna para que se incline hacia uno u otro lado. Supongamos ahora que dividimos imaginariamente la varilla en dos partes mediante un plano A', a la distancia X del punto de apoyo C. De acuerdo con la definición dada de centro de gravedad, tenemos que se puede reemplazar la parte AA' por una fuerza perpendicular P_1 proporcional a $AA' = \frac{l}{2} - x$, a una distancia a del punto de apoyo C, siendo $a = \frac{1}{2}(\frac{l}{2} - x) + x = \frac{1}{2}(\frac{l}{2} + x)$. Análogamente, podemos reemplazar la parte A'B por una fuerza P_2 proporcional a $A'B = \frac{l}{2} + x$, a una distancia b del punto C, $b = \frac{1}{2}(\frac{l}{2} - x)$. Como la varilla AB, apoyada en C, está en equilibrio, siendo ρ el peso de la varilla por unidad de longitud, escribimos:

$$\underbrace{\rho(\tfrac{l}{2} - x)}_{P_1} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}(\tfrac{l}{2} + x)}_{a} = \underbrace{\rho(\tfrac{l}{2} + x)}_{P_2} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}(\tfrac{l}{2} - x)}_{b} .$$

Por consiguiente, a partir del principio de razón suficiente que en este caso se reduce a un principio de simetría, Arquímedes dedujo su famosa ley de la palanca. Ernst Mach, físico y filósofo austriaco, fue uno de los primeros en combatir los principios apriorísticos en ciencia. Para Mach[42] el principio de razón suficiente no está basado en la intuición *a priori* independiente de toda observación, sino en un gran cúmulo de observaciones previas. El razonamiento de Arquímedes, según Mach, es ilusorio, pues *a priori*, sin realizar observaciones y experimentos pertinentes, no podría saberse si el equilibrio de una barra homogénea suspendida de su punto medio dependería o no del material, del color, del ángulo que forma la barra con la dirección NS, etc. Todas las substancias podrían ser magnéticas y el campo magnético terrestre ser mucho más intenso; en estas condiciones la barra considerada, suspendida desde su punto medio no adoptaría una posición horizontal de equilibrio. Sabemos que los factores indicados no influyen, no por el principio de razón suficiente, sino por las observaciones que al respecto hemos hecho, consciente o inconscientemente, desde nuestra niñez. Las condiciones de equilibrio de una palanca dependen de la longitud de sus brazos y de la distribución de los pesos, y esto lo sabemos solamente porque nos lo dicen la observación y la experimentación.

5. DEFINICION ESTATICA DE FUERZA

Con el objeto de acercarnos a la formulación de las leyes generales de la estática, daremos un salto y pasaremos al estudio de la ley de Robert Hooke (1635-1703), físico inglés de notable talento y habilidad. Newton reconoció que Hooke, juntamente con Wren y Halley, habían sugerido la ley de la gravitación universal.

Se toma un resorte de acero o de otro material elástico. Uno de sus extremos se sujeta de un clavo u otro soporte. En el otro extremo se coloca un platillo sobre el que se pueden colocar pesas (Fig. 7) (una forma de tener fácilmente una caja de pesas consiste en determinar con una balanza de precisión el peso de cada tipo de moneda en circulación). Si se determinan los diferentes alargamientos del resorte producidos por pesos crecientes se encuentra la ley lineal de Hooke: $P = k \cdot \Delta L$.

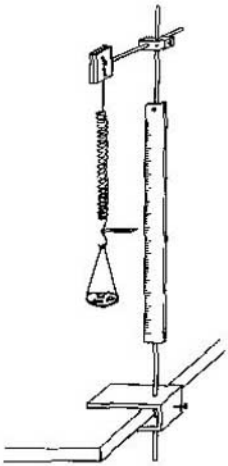


Fig. 7

Es decir que midiendo el incremento de longitud de un resorte, se puede determinar el peso correspondiente. De esta ley surge de inmediato la invención del dinamómetro, que no es otra cosa que un resorte calibrado. Mediante éste podemos generalizar el concepto de peso y decir que, por ejemplo, si se sujeta el extremo de un dinamómetro de un clavo y se ejerce un esfuerzo muscular del otro extremo, de manera que el índice del dinamómetro indique n kilogramos, el esfuerzo es equivalente a una fuerza de n kilogramos.

La unidad de fuerza se define como la fuerza equivalente al peso de un litro de agua a la temperatura de su máxima densidad (~ 4°C). Con el objeto de tener una unidad fija de comparación, se ha elegido, en la Oficina de Pesas y Medidas de París, de una vez por todas, una masa de platino cuyo peso se toma por un kilogramo y que con gran aproximación concuerda con el peso previamente indicado.

6. NOCION DE PESO ESPECIFICO

Como el peso de un cuerpo homogéneo es proporcional a su volumen, se ha creado otra noción importante: la de peso específico. Se define éste como la relación entre el peso y el volumen. El volumen de un cuerpo no absorbente se puede determinar sumergiéndolo totalmente en un recipiente graduado que contenga un líquido y determinando el aumento aparente de volumen del líquido. Este concepto fue formulado claramente por primera vez por Arquímedes. Los libros de historia[17] relatan que el rey Herón había entregado cierta cantidad de oro a los artífices de la corte, a quienes les había encomendado la elaboración de una corona. Como sospechaba que hubieran reemplazado parte del oro por plata, pidió a Arquímedes que determinara si había fraude en dicha corona. Mientras meditaba sobre este problema, Arquímedes notó que durante el baño, estando su cuerpo sumergido totalmente en el agua, desplazaba un volumen de agua igual al de su cuerpo y que su peso aparecía aparentemente disminuido en una cantidad igual al peso del volumen de agua desplazada. Después de algunas experiencias para confirmar su hallazgo, concibió el concepto de peso específico, mediante el cual determinó cuantitativamente la cantidad de plata y oro que contenía la citada corona. Este caso demuestra a las claras la importancia que tienen la observación, los experimentos controlados y la chispa de la inspiración o de la creación en la génesis de hipótesis y de conceptos en ciencia, y además, cómo a veces un problema práctico puede promover una investigación en ciencia pura. Algo similar es lo que aconteció con la ley de Hooke, es decir que un adelanto en ciencia pura que no tuvo en principio ninguna finalidad práctica, sirvió luego de base a múltiples aplicaciones.

7. MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Por lo considerado hasta ahora vemos que para describir la realidad física es necesario introducir conceptos que permitan medir sus distintos aspectos y las relaciones entre ellos. A las ciencias físicas les atañe los aspectos medibles de las cosas y de los fenómenos. Así, por ejemplo, hemos visto que para describir la forma de los objetos y sus posiciones relativas se introdujeron los conceptos de longitud, superficie, volumen, ángulo, etc.; para estudiar el equilibrio de los cuerpos, las nociones de peso, centro de gravedad, etc. El concepto de peso específico se define por una relación, como se ha indicado, entre el peso y el volumen. Estos conceptos, así como otros que se indicarán, a medida que sea necesario, han sido definidos operacionalmente. Esto significa que la definición de un concepto lleva implícitas las operaciones que deben efectuarse para medirlo respecto de una unidad. El estudio observacional de la naturaleza física implica múltiples operaciones de medición.

Algunas de las cantidades que se utilizan en física, como, por ejemplo, longitud, superficie, volumen, peso, peso específico, etc. se pueden especificar mediante una unidad y un número, que indica cuántas veces la unidad está comprendida en la cantidad que se mide. Para medir una cantidad o magnitud física es necesario primero tomar una unidad adecuada de la misma magnitud. Así, por ejemplo, para medir segmentos es necesario definir un segmento unidad; para medir pesos específicos, es menester definir una unidad de peso específico. Solamente se pueden comparar cantidades o magnitudes de la misma especie; es decir, no se puede comparar un segmento de un metro de longitud con un peso de un kilogramo.

Para especificar algunas de las magnitudes físicas, como las referidas más arriba, basta un número y la unidad de medida que se tome; así, por ejemplo, decimos que la longitud de un segmento es 1,053 metros. Estas magnitudes se llaman escalares.

Otras magnitudes, como los desplazamientos, requieren para su completa especificación un módulo, una dirección y un sentido. Si, por ejemplo, de la posición A en que nos encontramos nos trasladamos a la posición B, que se encuentra al norte de A en la dirección Norte-Sur y a una distancia de este punto de 10 kilómetros, nuestra traslación queda definida por una dirección Norte-Sur, un sentido del Sur al Norte y un módulo igual a 10 kilómetros. Estas magnitudes se llaman vectoriales.

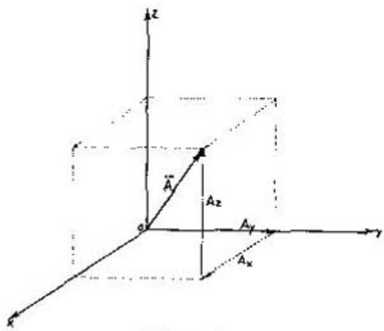


Fig. 8

Tomemos tres ejes de referencia (Fig. 8). Un desplazamiento en el espacio con respecto al punto 0 se puede representar por el segmento dirigido $\vec{A}$ que une el punto inicial y el final del desplazamiento. A tal segmento dirigido se le llama vector y puede ser especificado por sus proyecciones o componentes, $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$, según los tres ejes de coordenadas x, y, z, respectivamente.

Se llaman vectores libres, o simplemente vectores, a aquéllos que solamente están definidos por su dirección, sentido y módulo. Por lo tanto, dos vectores que yacen en rectas paralelas y que tienen igual sentido y módulo son iguales. Si un cuerpo rígido experimenta un desplazamiento definido por el vector $\vec{A}$, no interesa el punto en que se aplique dicho vector, pues todos los puntos del cuerpo experimentan el mismo desplazamiento. Consecuentemente, los desplazamientos se representan por vectores libres o simplemente vectores. En cambio, si una fuerza se desplaza en una dirección perpendicular y se mantiene paralela a sí misma, el producto del módulo de la fuerza por su brazo de palanca con respecto al punto de apoyo del cuerpo, cambia, (ecuación [1]) y por lo tanto las condiciones de equilibrio del cuerpo varían. El punto de aplicación de una fuerza puede desplazarse a lo largo de su recta de acción, puesto que no altera las condiciones de equilibrio del cuerpo sobre el que actúa. Las fuerzas se representan por vectores aplicados. Esto se verá más detenidamente en la sección 8.

Veamos ahora cómo se determina la suma de dos o más vectores. Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que tienen el origen común 0, la resultante de estos dos vectores es por definición la diagonal $\vec{R}$ del paralelogramo (Fig. 9).

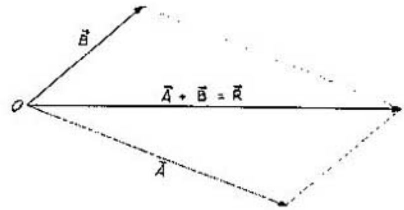


Fig. 9

El módulo o valor absoluto de $\vec{R}$ se determina midiendo la resultante $\vec{R}$ en una escala igual a la que se empleó para determinar los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Es fácil probar que, representando los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{R}$ por sus componentes con respecto a un sistema de coordenadas, se verifica:

$$R_x = A_x + B_x; \qquad R_y = A_y + B_y; \qquad R_z = A_z + B_z$$

es decir, que la proyección de la resultante sobre uno cualquiera de los ejes, es igual a la suma de las proyecciones de los vectores componentes sobre el mismo eje.

Si se tienen n vectores concurrentes, $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$, ... $\vec{A}_n$, el vector resultante será:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{A}_i$$

el que se determinará aplicando sucesivamente la regla del paralelogramo. Como ejercicio dejamos al lector la demostración de los siguientes resultados:

$$R^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,x}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,y}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,z}\right)^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

donde

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} A_{i,x}; \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} A_{i,y}; \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} A_{i,z}$$

siendo: R = módulo del vector resultante: $A_{1,x}$, $A_{1,y}$, $A_{1,z}$, componentes del vector $\vec{A}_1$ según los ejes x, y, z; R_x, R_y, R_z, componentes del vector resultante según los mismos ejes.

Se ha dado una brevísima introducción al álgebra de vectores, la que constituye una creación matemática que facilita el estudio de algunos aspectos de la realidad física. El estudio de los fenómenos físicos arranca de la observación y la experimentación; pero, si no fuera por la adopción de conceptos, de procedimientos de mediciones, de símbolos y de operaciones matemáticas en las que ellos intervienen, la física no hubiera pasado de ser un simple amontonamiento de datos observacionales.

8. CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO SOBRE EL QUE ACTUAN FUERZAS

Nos hemos referido ya en la sección 1 de este capítulo al principio de la palanca y a la extensión del concepto de fuerza mediante el dinamómetro (sección 5). Si en ambos extremos de una barra rígida, cuyo peso resulte relativamente despreciable, se aplican dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, que distan del punto de apoyo a_1 y a_2, respectivamente, se cumple, cuando se encuentran en equilibrio:

$$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2. \qquad [2]$$

La resultante de las dos fuerzas paralelas pasa por el punto de apoyo, pues de lo contrario la barra giraría hacia el lado de la resultante. Esta debe ser paralela también y su módulo debe ser igual a la suma de los módulos de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (Fig. 10). El punto de apoyo puede ser reemplazado por una fuerza que tenga igual recta de acción que la resultante $\vec{R}$ e igual módulo, si bien de sentido opuesto. Para comprender esto claramente, imaginemos la palanca AB sostenida por medio de un dinamómetro desde el punto de apoyo C. En condiciones de equilibrio el dinamómetro indicará una fuerza igual a $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. En caso contrario, la palanca no estaría en equilibrio. Este resultado, como se ve fácilmente, puede generalizarse al caso en que actúen

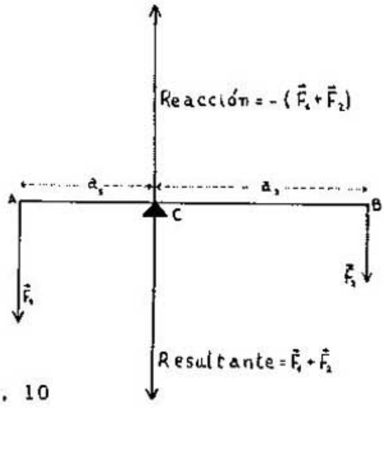


Fig. 10

sobre la barra AB muchas fuerzas que se equilibran. En este caso la resultante de todas las fuerzas paralelas deberá pasar por el punto de apoyo de la palanca y éste producirá una reacción que estará representada por una fuerza de igual módulo que la resultante, aunque de sentido contrario. Por consiguiente, si sobre un cuerpo rígido apoyado en un punto C actúan fuerzas paralelas que se equilibran, teniendo en cuenta la reacción del punto de apoyo, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i + \vec{R} = 0. \qquad [3]$$

Como la reacción del punto de apoyo es una fuerza, es posible establecer que para que un cuerpo rígido se encuentre en equilibrio bajo la acción de un conjunto n de fuerzas paralelas ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... $\vec{F}_n$) debe cumplirse:

$$\sum F_i = 0,$$

es decir, que la resultante de todas las fuerzas actuantes, en las condiciones referidas, debe ser nula.

Otra ley importante en estática es la del paralelogramo de las fuerzas. Si dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ actúan en un punto C pueden ser reemplazadas por la resultante de ambas. Se comprueba fácilmente mediante dinamómetros que si $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (Fig. 11) se representan por vectores que forman los lados adyacentes de un paralelogramo, de manera que sus longitudes sean respectivamente proporcionales a los módulos de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, la resultante de estas fuerzas, en dirección y módulo, está representada por la diagonal del indicado paralelogramo.

Ahora estamos en condiciones de generalizar la conclusión anterior y expresar una de las condiciones de equilibrio de un cuerpo. Para que un cuerpo rígido esté en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas de direcciones diferentes es necesario que la resultante sea nula.

Pasemos ahora a estudiar la segunda condición de equilibrio.

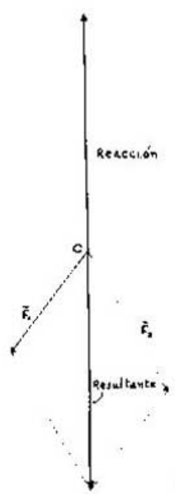


Fig. 11

Llamamos momento de una fuerza con respecto a un punto, al producto del módulo de la fuerza por el brazo de palanca (distancia del punto considerado al pie de la perpendicular a la recta de acción de la fuerza). Definimos momento positivo cuando tiende a producir una rotación en el sentido contrario a las agujas de un reloj, y negativo cuando la referida rotación tiene el sentido de las agujas del reloj.

De acuerdo con estas nuevas definiciones podemos escribir la relación [2] de la siguiente manera:

$$N_1 - N_2 = 0 \qquad [4]$$

siendo, respectivamente, N_1 y N_2 los momentos de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con respecto al punto de apoyo C (Fig. 10). Por lo tanto, el momento de dos fuerzas paralelas que actúan en una barra que se encuentra en equilibrio con respecto al punto de apoyo es nulo.

Teniendo en cuenta lo expresado ya con respecto a la resultante de fuerzas coplanares no paralelas y a las fuerzas que representan las reacciones de los puntos de apoyo, generalizaremos la ley de los momentos indicada. Para que un cuerpo rígido sometido a varias fuerzas coplanares cualesquiera esté en equilibrio con respecto a las rotaciones es necesario que la suma de los momentos con respecto a cualquier punto sea cero.

Dando un pequeño paso más en el camino de la abstracción y de la generalización, cuyos detalles dejamos como ejercicio al lector, se puede expresar el equilibrio de un cuerpo rígido por las siguientes dos condiciones: para que exista equilibrio de traslación, la resultante de todas las fuerzas, coplanares o no, que actúan sobre el cuerpo debe ser nula; y para que además exista equilibrio de rotación se requiere que el momento de todas las fuerzas actuantes, con respecto a cualquier eje, sea nulo.

Hemos visto cómo a partir de:

a) observaciones y experimentos sencillos;
b) la formulación de algunas definiciones que son creaciones del investigador, y
c) cierta dosis de abstracción y generalización,

se llega a formular leyes generales que debe cumplir un cuerpo rígido en equilibrio.

9. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Los orígenes de este principio se encuentran en trabajos de Leonardo de Vinci, quien lo aplicó para determinar la ley de la palanca, y de Stevinus (1548-1620). También lo aplicó Galileo en la explicación de algunas máquinas simples. Hasta un siglo más tarde no dio Jean Bernoulli (1667-1748) el primer enunciado general del mismo.[17,44]

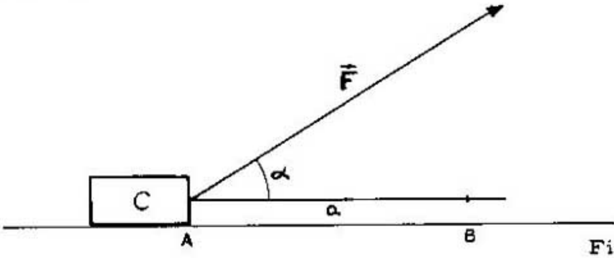


Fig. 12

Antes de entrar a explicar este principio, que implica las condiciones de equilibrio previamente indicadas, es preciso dar una definición de trabajo de una fuerza. Supongamos que sobre un cuerpo C (Fig. 12) actúa una fuerza constante F, que forma un ángulo α con la recta sobre la que se desplaza el cuerpo. Si su desplazamiento es igual al segmento a, el trabajo de la fuerza, al efectuar ese desplazamiento, se define así:

Trabajo = proyección de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento × desplazamiento

$$\text{Trabajo} = F \cdot \cos \alpha \cdot a \qquad [5]$$

Hemos visto que los desplazamientos se representan por vectores. Indicando el vector desplazamiento por $\vec{a}$, se define como producto escalar de dos vectores, $\vec{F}$ y $\vec{a}$, el producto de los módulos por el coseno del ángulo comprendido, es decir:

$$\text{Producto escalar de los vectores } \vec{F} \text{ y } \vec{a} = \vec{F} \cdot \vec{a} = F \cdot a \cdot \cos \alpha$$

De acuerdo con las definiciones dadas, escribimos:

$$\text{Trabajo} = W = \vec{F} \cdot \vec{a}. \qquad [6]$$

Consideremos un sistema de coordenadas, y en cada eje tomemos un vector unidad, que llamaremos versor y designaremos por $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente (Fig. 13).

Por la definición de suma de vectores ya explicada, vemos que podemos escribir:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

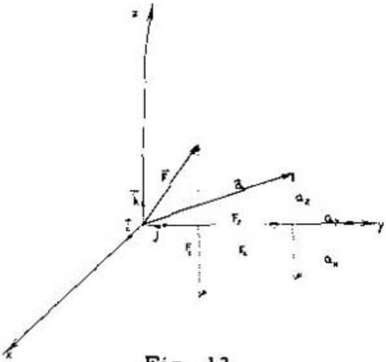


Fig. 13

Aplicando la definición de producto escalar a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, se tiene:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1; \quad \vec{j}\cdot\vec{j} = 1; \quad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0; \quad \vec{i}\cdot\vec{k} = 0; \quad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \qquad [7]$$

Se deja al lector, como ejercicio, la demostración de estas igualdades. Es posible escribir ahora la expresión del trabajo de la siguiente manera:

$$W = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = F_x a_x + F_y a_y + F_z a_z$$

El último miembro de esta igualdad se obtiene mediante las relaciones [7]. Si el desplazamiento fuera muy pequeño, se indicará por $\Delta\vec{a}$ y el trabajo correspondiente por ΔW.

$$\Delta W = F_x\Delta a_x + F_y\Delta a_y + F_z\Delta a_z$$

Introduciremos ahora el principio de los trabajos virtuales. Empecemos con un ejemplo sencillo. Supongamos que sobre un plano inclinado se desplaza sin rozamiento un cuerpo de peso P_1. Este peso se puede descomponer en una componente normal al plano ($P_n = P_1 \cdot \cos\theta$) y otra paralela al plano ($P_2 = P_1 \cdot \operatorname{sen}\theta$). La primera componente es neutralizada por la reacción del plano sobre el cuerpo. Para que el cuerpo esté en equilibrio sobre el plano inclinado debe aplicarse una fuerza de igual recta de acción y módulo, pero de sentido opuesto al de P_2. Es decir, que el peso P_2' que debemos colgar de la polea de la figura 14 es igual a P_2, o sea:

$$P_2' = P_2 = P \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Este resultado es fácil de verificar experimentalmente. Supongamos ahora que al cuerpo C se le da un desplazamiento virtual, es decir un desplazamiento que es consistente con los vínculos del sistema (o, en otras palabras, un desplazamiento permitido por los vínculos). En el caso que estamos considerando, un desplazamiento virtual sería un movimiento del cuerpo hacia arriba o abajo sobre el plano inclinado. En condiciones de equilibrio, el trabajo que efectuaría la fuerza P_2 es igual en valor absoluto, aunque de signo contrario, al que efectuaría P_2'. Consecuentemente, el trabajo de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en estado de equilibrio al efectuar un desplazamiento virtual, es cero, dado que si llamamos Δs al desplazamiento virtual del cuerpo, tendremos que Δs será también el desplazamiento del peso P_2^1. La componente normal P_n no efectuará trabajo en este desplazamiento. Por lo tanto tendremos, aplicando el principio:

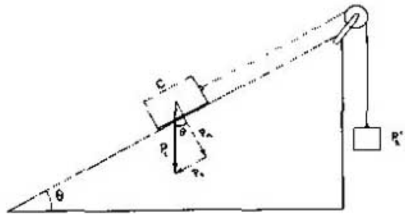


Fig. 14

$$P_1 \operatorname{sen}\theta \cdot \Delta s + P_2^1 \Delta s = 0$$

$$\therefore \; P_2^1 = -P_1 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Se podría tomar muchos ejemplos con combinaciones de poleas, palancas, tornos, etc. y proceder en forma análoga. En todos ellos encontraremos que, en condiciones de equilibrio, se cumple el principio indicado.

Generalizando, se puede expresar el principio de los trabajos virtuales de la manera siguiente:

Si un sistema mecánico cualquiera con interconexiones internas y apoyos o vínculos está sometido a un conjunto de fuerzas externas $F_1, F_2, \dots F_n$, la condición necesaria y suficiente para que esté en equilibrio es que en un desplazamiento virtual pequeño (compatible con la estructura y los vínculos del sistema considerado) el trabajo de las fuerzas actuantes sea nulo.

Supongamos que las reacciones de los vínculos son tales que no producen trabajo en un desplazamiento virtual; designando por $\overline{\Delta r}_i$ el desplazamiento virtual del punto de aplicación de la fuerza $\overline{F}_i$ el principio de los trabajos virtuales se expresa por la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{i=n} (F_{ix}\Delta x_i + F_{iy}\Delta y_i + F_{iz}\Delta z_i) = 0$$

donde F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} son los componentes según los ejes x, y, z del vector F_i, y Δx_i, Δy_i, Δz_i las del vector $\Delta\vec{r}_i$.

El principio de los trabajos virtuales constituye la proposición o la afirmación más general de la estática. A partir de él se pueden deducir las condiciones de equilibrio de cualquier otro sistema mecánico.

Veamos algunas aplicaciones de este principio.

Sea una prensa hidráulica (Fig. 15) constituida esquemáticamente por dos cilindros A y B, de secciones S_A y S_B respectivamente, comunicados por el tubo T.

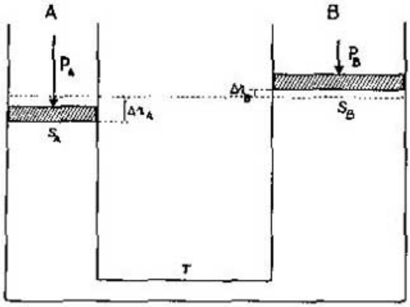


Fig. 15

42

En los cilindros hay un líquido incompresible y sobre los émbolos correspondientes se colocan los pesos P_A y P_B. Se desea saber qué relación deben tener estos pesos para que haya equilibrio. Un desplazamiento virtual en este caso sería un descenso o ascenso de uno de los émbolos. Si llamamos Δr_A al desplazamiento virtual del émbolo A, el correspondiente desplazamiento virtual del émbolo B será, teniendo en cuenta la incompresibilidad del líquido:

$$\Delta r_B = -\Delta r_A \cdot \frac{S_A}{S_B} \qquad [8]$$

Si se aplica ahora el principio indicado, tenemos:

$$0 = P_A \cdot \Delta r_A + P_B \cdot \Delta r_B = P_A \Delta r_A - P_B \cdot \Delta r_A \cdot \frac{S_A}{S_B}$$

$$\therefore \quad \frac{P_A}{S_A} = \frac{P_B}{S_B}; \qquad \frac{P_A}{P_B} = \frac{S_A}{S_B} \qquad [9]$$

La primera de estas relaciones afirma que la presión (fuerza por unidad de superficie) es igual en ambos cilindros. La segunda indica que las fuerzas en equilibrio son proporcionales a las superficies, es decir que, si la relación entre las secciones es, por ejemplo $\frac{S_B}{S_A} = 100$, ejerciendo una fuerza de un kilogramo en el cilindro A, se podría levantar un peso de 100 kilogramos en el cilindro B; pero el trabajo que efectuaría la fuerza P_A al descender en r_A, sería igual al trabajo que efectuaría el peso en B, pero de signo contrario.

Consideremos otro ejemplo. Tomemos un sistema constituido por dos poleas diferenciales A y B de radios r_1 y r_2, y vinculemos ambas por una cadena o soga inextensible de la manera indicada en la figura 16. ¿Qué fuerza debemos aplicar para elevar un peso P? Supongamos que producimos una variación $\Delta\alpha$ en la polea superior (siendo $\Delta\alpha$ el ángulo de giro de la polea A). Mediante consideraciones geométricas sencillas vemos que se verifica, siendo Δl_F y Δl_P los desplazamientos virtuales de la fuerza F y del peso P, respectivamente, que:

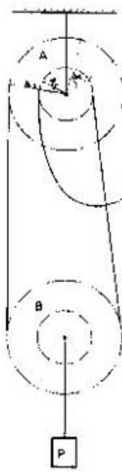


Fig. 16

$$\Delta l_F = r_2 \Delta\alpha; \qquad \Delta l_P = -\frac{1}{2}(r_2 - r_1) \cdot \Delta\alpha$$

La segunda de estas relaciones se obtiene teniendo en cuenta que desciende $\frac{1}{2} r_1 \Delta\alpha$ y asciende $\frac{1}{2} r_2 \Delta\alpha$.

Aplicando ahora el principio de los trabajos virtuales, obtenemos:

$$F \cdot \Delta l_F + P \cdot \Delta l_P = 0$$

y reemplazando los valores hallados de Δl_F y Δl_P, tenemos:

$$F r_2 \Delta\alpha - \frac{1}{2} P (r_2 - r_1) \Delta\alpha = 0$$

o sea

$$\frac{F}{P} = \frac{r_2 - r_1}{2 r_2}.$$

Las poleas diferenciales se construyen de manera que el numerador de esta última relación sea pequeño comparado con el denominador, lo que hace posible levantar un peso considerable con una fuerza pequeña F.

Como aplicación de los conceptos explicados, determínese el valor de $\frac{F}{P}$ para el polipasto indicado en la figura 17 en condiciones de equilibrio y considerando nulo el rozamiento: 1) aplicando el principio de composición de fuerzas paralelas y admitiendo que el hilo es flexible (por lo tanto la tensión que soporta es constante a lo largo del mismo, y 2) por medio del principio de los trabajos virtuales.

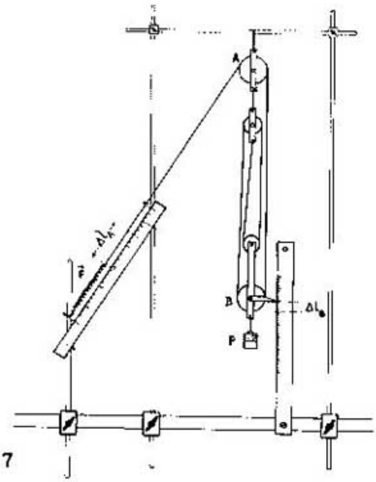


Fig. 17

Los polipastos indicados en las figuras 16 y 17 son muy fáciles de construir usando ruedas de mecano.

10. CONSIDERACIONES SOBRE PROCEDIMIENTOS Y FINES DE LA FISICA

Se ha tratado en sus aspectos más importantes, y dejando de lado muchas sutilezas y desarrollos colaterales, el capítulo más sencillo de la física, es decir: la estática. A partir de los datos empíricos, se expuso en forma abreviada, pero clara, el camino seguido: elaboración de conceptos básicos, sugerencias de hipotéticas leyes que expresen las condiciones de equilibrio de un cuerpo sometido a distintas fuerzas y verificación experimental de las mismas, simplificación de las leyes y condiciones verificadas en un número mínimo de postulados generales o principios, los que resumen todo el conjunto de conocimientos verificados en el campo tratado. En el caso particular de la estática, el conjunto mínimo de estos principios generales se reduce a uno: *el principio de los trabajos virtuales*.

El objeto de esta publicación es, como ya se ha dicho, poner de manifiesto los distintos aspectos del procedimiento que se sigue para llegar a la formulación de teorías físicas, y como la exposición precedente referente a la estática constituye un ejemplo ilustrativo, aunque simple, en tal sentido, cabe ahora hacer algunas reflexiones y consideraciones generales sobre la construcción de una teoría física.

La ciencia comienza con la observación de hechos. Sin esta etapa no puede haber ciencia, pero si se permanece sólo en esta etapa, tampoco es posible construir ciencia. Es necesario inferir de los datos de la observación y la experimentación conceptos operacionales (por ejemplo, longitud, ángulo, peso, fuerza, peso específico, centro de gravedad, momento de una fuerza, etc.); obtener luego las correlaciones que puedan establecerse entre los datos observables que corresponden a un determinado proceso, y finalmente, es preciso pasar de los casos particulares analizados a formular una ley general o un principio. ¿Cómo se produce este importantísimo paso? Esto constituye un punto discutible y motivo de investigación psicológica.[27] Generalmente se llama inducción al proceso que nos permite pasar de lo particular a lo general, o sea, en cierto modo, el proceso inverso al de la deducción que nos permite pasar, por procedimientos lógicos claramente definidos, de lo general a los casos particulares. El proceso de la inducción no se puede precisar y requiere, por lo general, inspiración creadora. Por tanto, en la formulación de una teoría científica es necesaria, aunque no suficiente, la capacidad de inventiva o de creación. Sin ella no se podría llegar a exponer los principios generales de la ciencia, los que constituyen el desideratum de la misma. Estos principios representan una extraordinaria síntesis del pensamiento, pero para que tengan una sólida base es necesario deducir de ellos una serie de conclusiones que puedan ser sometida a la verificación experimental. Si hay confirmación entre las conclusiones obtenidas por deducción, a partir de los principios generales, y los resultados correspondientes de los experimentos, se aceptan aquéllos como adecuados. Cuando en algún caso se produce una discrepancia, es necesario reconstruir la teoría a fin de evitarla. Las teorías son creaciones del hombre y deben ser cambiadas todas las veces que lo exijan los resultados experimentales.

5

NOCIONES DE DINAMICA

Las primeras nociones de cinemática y dinámica fueron expuestas por Galileo Galilei. En su tratado *"Discorsi delle nuove scienze"* (29) no solo estableció las bases de la cinemática y la dinámica, sino también las del método experimental-hipotético-deductivo-experimental que caracteriza a la ciencia moderna. Este método, como ya se ha indicado, consta esquemáticamente de las siguientes partes: a) ordenación y análisis de los datos resultantes de la observación y la experimentación; b) sobre la información dada en a), creación de hipótesis y definiciones operacionales sobre cuya base se puedan estructurar teorías que sistematicen la descripción de los datos obtenidos; c) deducción de las conclusiones de dichas teorías; y d) confrontación de esas conclusiones teóricas con los resultados experimentales. Es decir que el método científico parte de la observación y la experimentación y termina con la observación y la experimentación.

1. DEFINICIONES PRINCIPALES

En el tercer día de los mencionados *"Discorsi"*, Galileo da la siguiente definición de movimiento uniforme: "Por movimiento uniforme significo uno en que las distancias recorridas por la partícula móvil en cualesquiera intervalos de tiempo iguales, son iguales". Define la velocidad de un movimiento uniforme como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerlo; es decir, que la distancia s, la velocidad v y el tiempo t en el movimiento uniforme están relacionados por la función:

$$s = v \cdot t \qquad [10]$$

Con el propósito de describir apropiadamente el movimiento de un cuerpo que cae, Galileo enuncia nuevas definiciones. ¿Cuál puede ser el movimiento no uniforme más simple? En el movimiento uniforme, la velocidad es constante y el espacio proporcional al tiempo. El tipo de movimiento no uniforme más sencillo sería aquél cuya velocidad fuese proporcional al tiempo, o sea:

$$v = a \cdot t \qquad [11]$$

Al incremento de la velocidad en la unidad de tiempo, a, se llama aceleración. Cuando la velocidad se incrementa en cantidades iguales en tiempos iguales se dice que el movimiento es uniformemente acelerado.

¿Qué relación existe entre la distancia, la aceleración y el tiempo en un movimiento uniformemente acelerado? En la figura 18 se ha representado la relación entre la velocidad y el tiempo en el movimiento uniforme y en el uniformemente acelerado. En el primero la velocidad es constante y la distancia recorrida está representada por la superficie del rectángulo que tiene por base t y por altura v. En el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad en función del tiempo está representada por una recta. Es fácil ver que el espacio que recorre este móvil en un tiempo t será igual al que recorrerá un móvil con velocidad constante igual a la velocidad media del móvil anterior. Se tiene (Fig. 18) que el área limitada por la recta OD, el eje horizontal de los tiempos y la ordenada en t son iguales a los del rectángulo que tiene por base el tiempo t y por altura la velocidad media V_m, que es igual a

$$V_m = \frac{1}{2} a \cdot t \qquad [12]$$

por lo tanto, la distancia recorrida por un móvil con movimiento uniformemente acelerado, en un tiempo t, cuando la velocidad correspondiente a $t = 0$ es nula, es:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad [13]$$

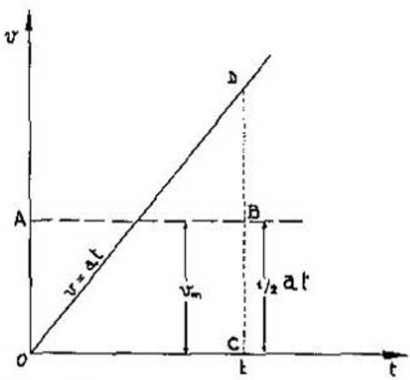


Fig. 18

48

Dejamos como ejercicio del lector el demostrar que, cuando la velocidad inicial no es nula en el movimiento uniformemente acelerado, es decir, cuando la velocidad como función del tiempo se expresa:

$$V = V_o + a \cdot t \qquad [14]$$

el camino recorrido en un tiempo t es:

$$s = V_o \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad [15]$$

Cuando el movimiento es uniformemente retardado, es decir cuando la velocidad disminuye en cantidades iguales en tiempos iguales, en vez de la relación [15] tendremos:

$$s = V_0 \; t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad [16]$$

Se han mencionado las relaciones que hay entre el camino recorrido, la velocidad inicial, la aceleración y el tiempo en el movimiento uniformemente acelerado o retardado. Si se desea determinar si cierto movimiento, como por ejemplo el de la caída libre, es o no un movimiento de este tipo, deben confrontarse los resultados de [15] con los obtenidos experimentalmente. Esto hizo por primera vez Galileo. Pero antes de indicar cómo lo hizo, generalizaremos algunas de las definiciones dadas.

Supongamos que la relación entre la velocidad y el tiempo de un móvil (por ejemplo, obtenida anotando en diferentes instantes la velocidad indicada por el velocímetro de un auto) sea la que aparece en la figura 19. Siempre que se presenta un nuevo problema, debemos

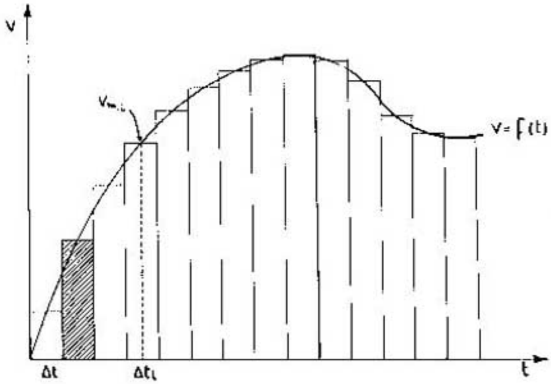


Fig. 19

tratar de reducirlo a otros más sencillos, cuya solución sepamos. Sabemos ya cual es la distancia recorrida por un móvil con velocidad constante. Por lo tanto, dividimos el eje de los tiempos en un número de pequeños intervalos Δt y suponemos que la velocidad en cada uno es igual a la velocidad media en el mismo intervalo. Cuando Δt es suficientemente pequeño, el trozo de curva $v = f(t)$, comprendido entre las ordenadas de los extremos de Δt puede, con suficiente aproximación, reemplazarse por una recta. Por lo tanto, los espacios recorridos en cada uno de los intervalos Δt serán iguales a las áreas de los correspondientes rectángulos rayados en la figura 19. La distancia total recorrida será igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos, es decir:

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} V_{m,i} \cdot \Delta t_i \qquad [17]$$

V_{mi} representa la velocidad media en el intervalo Δt_i, habiéndose dividido el intervalo total t en n partes iguales, o sea $t/n = \Delta t$. Vemos, por lo tanto, que el espacio recorrido por un móvil cuya velocidad en función del tiempo es dada por una función $v = f(t)$, entre el instante $t = 0$ y t, es igual a la superficie limitada por dicha curva y las ordenadas correspondientes a los extremos.

Consideremos la relación entre la distancia y el tiempo dada por la observación de un determinado móvil. Sea la gráfica correspondiente la indicada en la figura 20. Como ejercicio, indique el lector qué clase de movimiento corresponde respectivamente a los trazos AB, BC, CD y DE. Supongamos que la curva EF (Fig. 20) es la representación gráfica de una función continua $s = f(t)$. ¿Cómo se podría definir la velocidad que corresponde a este movimiento? Como hemos indicado precedentemente, una norma recomendable para resolver un nuevo problema es tratar

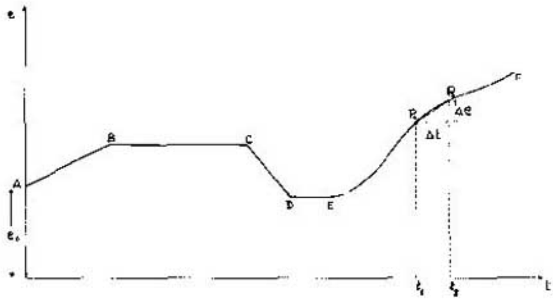


Fig. 20

de descomponerlo en problemas más sencillos que ya sepamos solucionar. Consideremos el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ (Fig. 20). El trazo de curva P_1P_2 limitado por las rectas perpendiculares al eje t, en los instantes t_1 y t_2, no será en general una recta, pero se aproximará a ella a medida que el intervalo Δt se haga cada vez más pequeño. Si trazamos la secante P_1P_2, se tendrá que este segmento representará un movimiento uniforme cuya velocidad será:

$$V = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad [18]$$

Por lo tanto, tendremos que la velocidad media en el trozo de curva P_1P_2 es igual a la velocidad precedentemente indicada, es decir:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Esta velocidad media, a medida que Δt se acerca a cero ($\Delta t \to 0$) se aproxima cada vez más a la velocidad en el instante t_1. Esto se indica en la siguiente forma:

$$V = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta s}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

A este límite se llama derivada de la función distancia con respecto al tiempo. Vemos pues que la velocidad en un determinado instante es igual a la derivada de la función distancia con respecto al tiempo.

Como ejercicio, proponemos al lector que, siguiendo un camino análogo al indicado, y partiendo de la representación de la velocidad en función del tiempo, demuestre que la aceleración es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Conviene, antes de seguir adelante, analizar la definición de movimiento y velocidad de Galileo que se ha transcrito. Las nociones de desplazamiento o movimiento, velocidad y aceleración dadas tienen un carácter relativo. Sólo es permitido hablar del desplazamiento o de la velocidad de un cuerpo con respecto a otro en relación con el cual se determinan, en sucesivos instantes, las correspondientes distancias. En otras palabras, al referirnos a desplazamientos, movimientos, velocidades y aceleraciones debemos indicar claramente, en cada caso, el sistema de coordenadas considerado. Un cuerpo puede estar en estado de reposo con respecto a un sistema referencial, por ejemplo un sistema de referencia fijo con respecto a la Tierra; pero dicho cuerpo estará en movimiento con respecto al Sol o a las llamadas estrellas fijas. En cada caso debemos indicar explícitamente cual es el sistema de referencia con respecto al cual estudiamos el movimiento de un determinado cuerpo. En síntesis, las nociones de desplazamiento, velocidad y aceleración son nociones relativas; es decir, se refieren a relaciones entre un cuerpo y un sistema de coordenadas fijo con respecto a otro cuerpo o a un sistema de cuerpos.

2. NACIMIENTO DE LA MECANICA

A base de las definiciones de los principales conceptos de cinemática que se han dado, pasaremos a exponer cómo nació la dinámica. Para esto nada mejor que transcribir algunas páginas de la inmortal obra de Galileo Galilei: *"Discursos y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias referentes a la mecánica y a los movimientos locales"*,[29] que el viejo y maltratado sabio terminó de redactar hacia fines de 1636 y que fue publicada en Leiden en 1638. Con esta magnífica obra aparecen los mismos tres personajes que en el tratado *"Diálogo concerniente a los dos principales sistemas del mundo"* [28] Salviati, Sagredo y Simplicio. Con dos de ellos, Salviati y Sagredo, Galileo deseó inmortalizar a amigos queridos. El tercero, Simplicio, es un personaje imaginario que actúa como defensor de las ideas científicas reinantes en esa época, intérprete y admirador de los escritos de Aristóteles y que no reconoce argumento más que los que puedan deducirse de la obra de Aristóteles. En el diálogo, Salviati habla por el propio Galileo, quien en algunos casos, donde más explícitamente se refiere a los descubrimientos hechos por él mismo, se indica con el nombre de "Académico Lincei", o simplemente "Académico", o "nuestro amigo común" o el "Autor". Sagredo hace la parte del profano culto que no limita su entusiasmo por las nuevas ideas cuando es convencido por los argumentos de Salviati. En muchas oportunidades repite los argumentos más difíciles en forma más elemental, en otras agrega nuevos argumentos, y también por su intermedio, Galileo expresa aquellas ideas sobre cuya veracidad no está plenamente convencido y las considera tema de discusión. Salviati y Sagredo representan, pues, dos aspectos de la personalidad de Galileo: el primero, al genial hombre de ciencia y profundo filósofo; el segundo, al fino y agudo observador e irónico polemista. Simplicio representa, como hemos dicho, el pensamiento científico y filosófico de la época.

Damos algunos detalles sobre la obra de Galileo, pues es indudable que ésta marca no sólo el nacimiento de una nueva física, sino también los distintos procedimientos que integran la metodología científica. Galileo crea y aplica el método experimental, en vez de limitarse a la mera y pasiva observación. Establece la relación fundamental entre el método experimental y el enfoque matemático que caracteriza a la ciencia moderna.

Consideramos que los *"Diálogos"* y los *"Discursos"* de Galileo constituyen no sólo jalones importantísimos del desarrollo científico, sino también obras magistrales respecto a la enseñanza de la física. Sus escritos son inmortales desde un punto de vista pedagógico. Creemos que la forma dialogada es sumamente eficaz para textos didácticos, y que no hay sustituto de la lectura directa de por lo menos parte de la obra de Galileo.

Con respecto a los trabajos de mecánica de Galileo, Lagrange expresó las siguientes palabras: "Los descubrimientos de los satélites de Júpiter, de las fases de Venus, de las manchas del Sol, etc. (efectuados por Galileo) no exigen más que un telescopio y asiduidad; pero es necesario un genio extraordinario para extraer las leyes de la naturaleza de los fenómenos que se habían tenido siempre bajo los ojos, pero cuya explicación había escapado siempre a la investigación de los filósofos".

Galileo efectuó los primeros estudios sobre el péndulo siendo estudiante aún. Un día que se encontraba en la catedral de Pisa, al observar las oscilaciones de la lámpara debidas al movimiento fortuito que se le había comunicado al encenderla, pudo constatar, usando el único reloj que poseía, su propio pulso, que la duración de cada oscilación permanecía constante, a pesar de que la amplitud disminuía. En los últimos años de su vida se preocupó por construir un reloj basado en el movimiento del péndulo que pudiera utilizarse en astronomía, y como ya se encontraba privado de la vista, le dictó a su hijo Vicente y a su alumno Viviani la descripción y el dibujo del reloj de péndulo. Los dibujos originales se conservan, pero se ha perdido el reloj que Viviani construyó en 1649. Esta invención de Galileo fue muy poco conocida en su época, y en el año 1656 Huygens (1629-1695), el más genial continuador de la obra de Galileo antes de Newton, construyó un instrumento del mismo tipo que se difundió rápidamente y prestó gran ayuda a la astronomía.

Con el objeto de dar una muestra del valor insustituible de sus obras, transcribiremos a continuación algunos fragmentos de sus escritos sobre mecánica.

Después de realizar prolijos experimentos con péndulos de distinta longitud, Galileo constató la relación entre la longitud y el período de oscilación de un péndulo. Esta conclusión la expresó en los siguientes términos:[28]

"*Salviati*. ... En cuanto a los tiempos de oscilación de los cuerpos suspendidos de hilos de diferente longitud, mantienen entre ellos la misma proporción que las raíces cuadradas de las longitudes del hilo respectivo; o se podría decir que las longitudes son entre sí como los cuadrados de los tiempos. De manera que, si se quisiera que el tiempo de oscilación de un péndulo fuese el doble del de otro, habría de cuadruplicarse la longitud del hilo. Del mismo modo, si un péndulo tiene una longitud nueve veces mayor que la de otro, éste ejecutará tres oscilaciones durante una del primero; de lo cual se deduce que las longitudes de los hilos están entre sí en razón inversa de los cuadrados del número de oscilaciones que tienen lugar en un mismo tiempo.

"*Sagredo.* Entonces, si entiendo bien, puedo medir fácilmente la longitud de un hilo cuyo extremo superior está sujeto a una altura cualquiera, aunque ese extremo esté oculto y sólo se vea el extremo inferior. Pues si ato a dicho extremo un objeto más bien pesado y lo hago oscilar y si un amigo cuenta el número de oscilaciones en tanto que yo, en ese lapso, cuento el número de oscilaciones de otro péndulo que tiene exactamente un codo (aprox. 42 cm) de longitud, conociendo entonces el número de oscilaciones que cada péndulo efectúa en un mismo intervalo de tiempo, se puede determinar la longitud del hilo. Supongamos, por ejemplo, que mi amigo cuenta 20 oscilaciones del péndulo de mayor longitud en el mismo tiempo en que yo cuento 240 del péndulo de menor longitud. Tomo los cuadrados de los dos números, 20 y 240, es decir 400 y 57.600. Como la longitud de mi péndulo es 1 codo, dividiré 57.600 entre 400 y obtendré así 144. Por lo cual la longitud del hilo será 144 codos.

"*Salviati.* No te equivocarás por mucho, sobre todo si cuentas un gran número de oscilaciones.

. . . .

"*Salviati.* Primeramente debe observarse que cada péndulo tiene su propio tiempo de oscilación, tan definido y exacto que no es posible hacerlo oscilar con otro período distinto. Tómese el hilo que sostiene el peso y trátese todo lo que se quiera de aumentar o disminuir la frecuencia de sus oscilaciones: será tiempo perdido. Por otra parte, un péndulo pesado que esté en reposo se puede poner en movimiento simplemente soplándolo; repitiendo los soplos con la frecuencia propia del péndulo, se le puede impartir un movimiento considerable. Supongamos que con el primer soplo hemos desplazado el péndulo de la vertical, por ejemplo, media pulgada, entonces, si después que el péndulo ha vuelto y está por comenzar la segunda oscilación, lo soplamos de nuevo, le impartiremos un movimiento adicional, y así sucesivamente con otros soplos con tal que ocurran en el instante apropiado y no cuando el péndulo vuelve hacia nosotros; en este caso el soplo dificultaría, en vez de favorecer, el movimiento. Continuando así con muchos impulsos, impartimos al péndulo tal impulso que se necesitará una fuerza mayor que la de un único soplo para detenerlo."

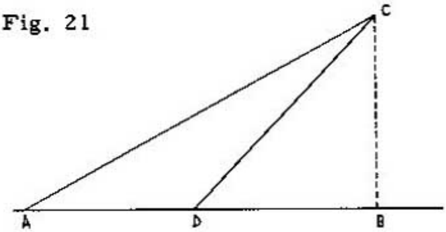
Con este último experimento Galileo inicia el estudio de las oscilaciones forzadas, que tanta importancia tienen en física pura y aplicada. Consideremos otra selección de sus ilustrativos diálogos: [24]

"*Salviati*. A aquéllos que, con gran brevedad y claridad, muestran las falacias de proposiciones que el vulgo tiene comúnmente por verdaderas, sería injuria tolerable el tenerles desprecio, en lugar de agradecimiento; pero muy desagradable y molesta es la aversión que suele a veces despertarse en algunos que, pretendiendo en la misma clase de estudios por lo menos la paridad con cualquier otro, sea quien sea, se percatan de que han dejado pasar por verdaderas algunas conclusiones que otro después, con breve y fácil razonamiento, ha comprobado y demostrado ser falsas. A tal aversión yo no la llamaré envidia, la que suele convertirse después en odio y en ira contra los descubridores de tales falacias, pero sí la denominaré deseo y afán de pretender mantener errores inveterados, antes de consentir que se acepten las verdades recientemente descubiertas; afán que, a veces, los induce a escribir en contra de esas verdades, perfectamente reconocidas aun por ellos mismos en su fuero interno, sólo por rebajar, en el concepto del numeroso y poco inteligente vulgo, la reputación del otro. Un número no pequeño de semejantes conclusiones falsas y de facilísima refutación, aceptadas sin embargo como verdaderas, me han sido indicadas por nuestro Académico y una gran parte de ellas las tengo además anotadas.

"*Sagredo*. Y no debes privarnos de ellas, sino hacérnoslas saber a su debido tiempo, aun cuando fuese necesario para ello tener una sesión especial. Por ahora, continuando el hilo de nuestro razonamiento, paréceme que con lo dicho hasta aquí damos por terminada la definición del movimiento uniformemente acelerado, del que se trata en las disertaciones siguientes, y es: llamamos movimiento igualmente o uniformemente acelerado aquel que, partiendo del reposo, va adquiriendo incrementos de velocidad iguales durante tiempos iguales.

"*Salviati*. Sentada esta definición, el Autor postula y supone como verdadero un solo principio, es decir: Acepto que las velocidades de un mismo móvil, adquiridas sobre diversos planos inclinados, son iguales, cuando las alturas de esos mismos planos son iguales. Se entiende por altura de un plano inclinado la perpendicular que desde el punto más alto de ese plano caiga sobre la línea horizontal trazada por el punto más bajo del mismo plano inclinado. Así, para mayor comprensión, siendo la línea AB la horizontal sobre la cual estén inclinados los planos CA, CD (Fig. 21), el Autor llama altura de los planos CA y CD a la perpendicular CB que cae sobre la horizontal BA; y supone que las velocidades de un mismo móvil descendiente por los planos inclinados CA y CD, alcanzadas en los extremos A y D, son iguales, por ser su altura la misma CB; y también se debe entender que esa velocidad es la que tendría en el extremo B el cuerpo en caída desde el punto C.

Fig. 21



"*Sagredo*. Ciertamente me parece que tal suposición tiene tanto de probable que merece ser admitida sin controversia, pero sobreentendido, siempre que se prescinda de todos los impedimentos accidentales y externos, y que los planos sean muy duros y tersos, y el móvil sea de figura perfectamente redonda, de modo que ni el plano ni el móvil tengan la más mínima aspereza. Eliminados todos los impedimentos y oposiciones, la luz de la razón me dicta sin dificultad que una bola pesada y perfectamente redonda, descendiendo por las líneas CA, CD y CB, alcanzarán los términos A, D y B con velocidad igual.

"*Salviati*. Tus razonamientos tienen mucho de probable pero, además de la verosimilitud, quiero yo, con un experimento, acrecer tanto la probabilidad, que muy poco le falte para poder igualarse con una demostración necesaria. Figuraos que esta hoja de papel es una pared vertical, y que de un clavo fijo en ella pende una bola de plomo, de una onza o dos, suspendida del hilo finísimo AB, de dos o tres codos de largo y vertical (Fig. 22); trazad en la pared una línea horizontal DC que corte en ángulo recto el perpendículo (plomada) AB, que distará de la pared unos dos dedos; trasladando luego el hilo AB con la bola hasta AC, dejad esta bola en libertad. La veréis descender primero describiendo el arco CBD y sobrepasar tanto el punto B que, recorriendo el arco BD, subirá casi hasta la indicada horizontal CD, faltándole sólo un pequeñísimo espacio para alcanzarla realmente, lo que impide el obstáculo del aire y del hilo. De aquí podemos con toda verdad, concluir que el ímpetu adquirido por la bola en el punto B, tras descender por el arco CB, fue tal que le bastó para elevarse hasta la misma altura por el arco semejante BD. Hecho y reiterado muchas veces este experimento, quiero que fijemos en la pared, sobre la vertical AB, un clavo tal como en E o en F, que sobresalga cinco o seis dedos a fin de que el hilo AC, al volver, como antes, a transportar la bola C por el arco CB, choque con el clavo E cuando la bola haya alcanzado el punto B y la obligue a seguir la circunferencia BG, descrita en torno al centro E; con lo cual se verá lo que puede hacer el mismo ímpetu ya considerado en el punto B y que elevó al móvil por el arco BD hasta la altura de la horizontal CD. Ahora amigos, vais a tener el gusto de ver subir la bola hasta la horizontal en el punto G; y una cosa parecida ocurriría si el tope se pusiese más abajo, tal como en F, en cuyo caso la bola describiría el arco BI terminando siempre su ascenso precisamente en la línea CD; y si el tope del clavo estuviese tan abajo que, al pasar el hilo por debajo de él, no pudiese subir hasta la altura CD (lo que sucedería en el caso de estar más próximo al punto B que a la intersección de la AB con la horizontal CD), entonces, el hilo subiría sobre el clavo y se enroscaría en él.

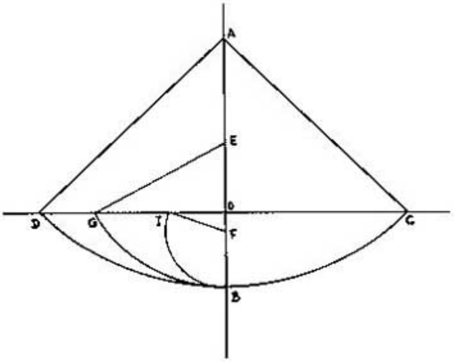


Fig. 22

Este experimento disipa toda duda sobre la verdad de lo supuesto, porque siendo los dos arcos CB y DB iguales y estando ubicados de un modo semejante, la cantidad de movimiento adquirida en la caída a través del arco CB es la misma que la adquirida durante el descenso por el arco DB; pero la cantidad de movimiento adquirida en B, a lo largo del arco CB, es capaz de elevar el mismo móvil por el arco BD; por consiguiente, también la cantidad de movimiento adquirida en la caída DB es igual a aquélla que eleva al móvil por el mismo arco desde B hasta D; de modo que, en general, toda cantidad de movimiento adquirida por la caída en un arco es igual a aquélla que puede hacer volver a subir el móvil por el mismo arco. Ahora bien, todas las cantidades de movimiento que hacen volver a subir la bola por los arcos BD, BG y BI son iguales, porque son idénticas a la cantidad de movimiento adquirida en la caída CB, como muestra el experimento; por consiguiente, todas las cantidades de movimiento adquiridas por las caídas por los arcos DB, GB y BI son iguales.

"*Sagredo.* El razonamiento me parece muy concluyente y el experimento es tan apto para verificar la hipótesis, que será muy digno admitir ésta, como si se hubiese demostrado.

"*Salviati.* No quiero, Sagredo, que vayamos más allá de lo debido, máxime que en este asunto nos serviremos principalmente de movimientos sobre superficies planas y no sobre curvas, donde la aceleración se acumula por grados muy diferentes de aquéllos que, según veremos, se acumula en las superficies planas.

De modo que, si bien estos experimentos nos muestran que la caída por el arco CB confiere al móvil una cantidad de movimiento tal que pueda volverlo a la misma altura por cualquier arco de los BD, BG, BI, no podemos, con la misma evidencia, demostrar que sucedería lo mismo si una bola perfecta descendiera por planos inclinados según las inclinaciones de las cuerdas de estos mismos arcos; antes al contrario, es presumible que al formar ángulo esos planos en el punto B, la bola que ha descendido por el plano inclinado según la cuerda CB, al encontrar obstáculo en los planos ascendentes según las cuerdas BD, BG, BI y al chocar con ellos, perdería parte de su ímpetu y no podría, subiendo, llegar hasta la línea CD. Pero removido el obstáculo que se interpone en el experimento, me parece fácil de comprender que el ímpetu sería suficiente para volver el móvil a la misma altura. Por consiguiente, por ahora tomemos esto como postulado; ya después podremos ver establecida su verdad absoluta cuando comprobemos que otras conclusiones derivadas de tales hipótesis, se corresponden y adaptan perfectamente a los experimentos. El Autor habiendo supuesto este único principio, pasa a las proposiciones que deduce por demostración."

Al estudiar las contribuciones a la ciencia de los hombres más geniales, es conveniente no limitarse a aquéllas que se basan en hipótesis y experimentos correctos, y cuyas conclusiones son inconmovibles a través del tiempo. Tiene un alto valor educativo para el estudiante indicar algunos puntos en que aun los hombres más geniales han cometido errores de índole científica, y aprenderemos que aun cuando creamos que estamos en lo cierto, debemos dudar y analizar todo el proceso de nuevo, teniendo cuidado de no ser víctimas de algún preconcepto no probado como verdadero. Con tal objeto transcribiremos el siguiente trozo de los considerados Diálogos.

"*Salviati*. ... suspendiendo una esfera de plomo de un hilo largo y sutil ligado al techo, si la alejáramos de la perpendicular dejándola después en libertad, ¿no habéis observado que, declinando, alcanzará del otro lado de la perpendicular casi la misma distancia que al principio?

"*Sagredo*. Lo he observado muy bien y visto que sube tanto como desciende (máxime si la esfera es suficientemente pesada), que he creído que el arco ascendente es igual al descendente, y por eso he pensado que sus oscilaciones podrían perpetuarse si se pudiera quitar el obstáculo del aire, cuya resistencia retarda e impide el movimiento del péndulo, aunque el obstáculo es bien pequeño, como lo prueba el gran número de oscilaciones que se producen antes que el móvil se detenga del todo.

"*Salviati.* No se perpetuaría el movimiento, Sr. Sagredo, aun cuando se quitase totalmente el obstáculo del aire, porque existe otro más recóndito todavía.

"*Sagredo.* ¿Y cuál es?, pues otro no recuerdo.

"*Salviati.* Que el alejamiento sea mayor o menor no importa, porque el mismo péndulo completa la oscilación siempre en tiempos iguales, sea aquélla más o menos grande; es decir que se aparte más o menos de la perpendicular; y si no fueran del todo iguales, sus diferencias son por lo menos insensibles, como la experiencia puede mostrar; pero si fueran muy desiguales, no desfavorecería, sino que favorecería nuestra tesis. Señalemos la perpendicular por AB y consideremos un peso C suspendido del punto A por la cuerda AC, y otro cuerpo E suspendido por medio de la misma (Fig. 23). Apartada la cuerda AC de la perpendicular y dejada después en libertad, los pesos C y E se moverán en los arcos de círculo CBD y EGF. Como el peso E está a una distancia menor que el cuerpo C, y como el arco (por lo que hemos dicho) se aparta menos, retornará por lo tanto más rápidamente y hará sus vibraciones más frecuentes que el peso C, y por lo tanto le impedirá alcanzar hacia D la distancia que alcanzaría si estuviera libre; y así habiendo en cada vibración impedimento continuo, se quedará finalmente en reposo. Ahora, la misma cuerda es un compendio de muchos péndulos pesados, es decir, cada una de sus partes es un péndulo, colgado más y más cerca del punto A y por lo tanto dispuesto a hacer sus vibraciones siempre más y más frecuentes." 59

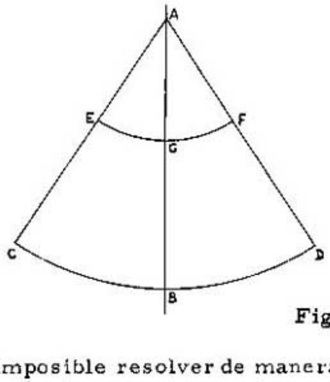


Fig. 23

Si el razonamiento de Galileo que acabamos de citar fuera correcto, resultaría que, en virtud del principio de la conservación de la energía, la energía de oscilación del péndulo debería convertirse en energía térmica de la cuerda o el alambre de suspensión; este hecho no se constata experimentalmente. Con los conocimientos de mecánica y de matemáticas de la época de Galileo, era imposible resolver de manera correcta el problema de la oscilación de una cadena o de un alambre en el vacío.*

---

* La solución del problema de las oscilaciones de una cadena conduce a una ecuación diferencial de Bessel.

2.1 Movimiento Naturalmente Acelerado

Galileo se interesó muy especialmente por la descripción correcta de la caída libre de los cuerpos, para lo cual pensaba que debía encontrarse una definición de movimiento acelerado que permitiera obtener una relación entre el espacio recorrido y el tiempo, que se ajustara a los datos correspondientes obtenidos experimentalmente. Galileo consideraba que[29c] "cualquiera puede inventar un tipo arbitrario de movimiento y discutir sus propiedades ...; pero hemos decidido considerar el fenómeno de la caída de los cuerpos con una aceleración tal que corresponda a la que realmente ocurre en la naturaleza y hacer que dicha definición de movimiento acelerado exhiba las características esenciales de los movimientos acelerados observados. Y esto, por último, después de repetidos esfuerzos, confiamos en que hemos logrado hacerlo. En este pensamiento estamos apoyados principalmente en que los resultados experimentales concuerdan con y corresponden a aquellas propiedades que han sido, una después de otra, demostradas por nosotros... . Cuando observo una piedra inicialmente en reposo que cae desde cierta altura y que va adquiriendo continuamente nuevos incrementos de velocidad, ¿por qué no podré yo creer que tales aumentos tienen lugar de un modo muy simple y casi obvio para todo el mundo? Si ahora examinamos el asunto con cuidado encontramos que no hay incremento más simple que el que se repite siempre del mismo modo. Esto podemos entenderlo fácilmente cuando consideramos la relación íntima entre tiempo y movimiento; porque así como el movimiento uniforme se define y se concibe cuando el móvil recorre distancias iguales en tiempos iguales, así también podemos de manera similar concebir que a iguales intervalos de tiempo la velocidad tenga incrementos iguales. Por lo tanto, podremos imaginarnos un movimiento uniformemente acelerado cuando, a cualesquiera intervalos iguales de tiempo, le correspondan iguales incrementos de velocidad..."

"*Sagredo*. Aunque no puedo poner ninguna objeción racional a ésta o a cualquiera otra definición ideada por cualquier autor, quienquiera que sea, pues todas las definiciones son arbitrarias, puedo sin embargo, sin ofender, permitirme dudar si una definición tal como la expuesta, dada de manera abstracta, corresponde y describe el tipo de movimiento acelerado con el cual nos encontramos en la naturaleza, como es el de la caída libre de los cuerpos. Y puesto que el Autor aparentemente sostiene que el movimiento descrito en su definición es el de la caída libre, me gustaría aclarar mi mente de ciertas dificultades para poder luego dedicarme más intensa y cuidadosamente a las propiedades y sus demostraciones.

"*Salviati*. Es bueno que tú y Simplicio expongáis estas dificultades. Son, me imagino, las mismas que se me ocurrieron a mí cuando vi por primera vez este tratado y que fueron aclaradas mediante discusión con el mismo Autor o razonándolas yo mismo. . ."

"*Sagredo*. Cuando pienso en un cuerpo pesado que cae a partir del estado de reposo. . . . nuestros sentidos nos muestran que tal cuerpo al caer adquiere de repente gran velocidad.

"*Salviati*. . . . Tú dices que el experimento parece mostrar que inmediatamente que un cuerpo pesado parte del reposo adquiere una velocidad muy considerable, y yo digo que el mismo experimento aclara el hecho de que inicialmente el movimiento de un cuerpo que cae, no importa su peso, es muy lento. . . . .
. . . Díganme, caballeros, ¿no es cierto que si al caer una maza sobre una estaca desde una altura de cuatro codos, la hunde en la tierra unos cuatro dedos, la que cae desde una altura de dos codos la hundirá una distancia mucho menor, y si cae desde un codo, una distancia menor aún, y finalmente, si ésta recorriera una distancia de un dedo al caer sobre la estaca, ¿cuánto más se hundiría ésta con respecto al hundimiento que experimentaría por el mero soporte de la maza? Si recorriera una distancia equivalente al espesor de una hoja el efecto sería totalmente imperceptible."

Galileo primero formuló la hipótesis de que la velocidad de un móvil, partiendo del reposo con respecto a un sistema de referencia fijo a la Tierra, era proporcional al espacio recorrido. Veamos cómo Galileo desechó esta suposición en la siguiente parte de sus Diálogos. [29c]

"*Sagredo*. Por lo visto, hasta ahora la definición podría haberse expresado un poco más claramente, quizás sin cambiar la idea fundamental, considerando que el movimiento uniformemente acelerado es aquél cuya velocidad crece proporcionalmente al espacio recorrido; de manera que, por ejemplo, la velocidad adquirida por un cuerpo que cae desde una altura de cuatro codos sería el doble de la adquirida al caer desde dos codos, y ésta última será el doble de la adquirida al recorrer el primer codo. Porque no hay duda que un cuerpo pesado que cae desde una altura de seis codos choca con un impulso doble del que tendría al recorrer tres codos, el triple del que tendría si cayera desde dos codos de altura y seis veces mayor del que tendría al final de uno.

"*Salviati*. Es alentador que compañero semejante haya incurrido en el mismo error que yo; y además, permíteme decirte que tu proposición parece tan altamente probable que nuestro Autor admitió, cuando le di mi opinión al respecto, que él había compartido por un tiempo la misma falacia. Pero lo que más me sorprendió fue ver como una proposición al parecer tan probable, que resultaba cierta a quienquiera le fuera planteada, con unas pocas y simples palabras se probó, no solamente que es falsa, sino imposible.

"*Simplicio.* Soy uno de los que aceptan esa proposición y cree que la velocidad de un cuerpo al caer se incrementa en proporción al espacio recorrido y que, por lo tanto, su cantidad de movimiento se duplica al caer desde una altura doble; me parece que estas proposiciones debieran ser admitidas sin vacilación ni controversia.

"*Salviati.* Y sin embargo son tan falsas e imposibles como pensar que el movimiento se lleva a cabo instantáneamente; he aquí una clara demostración de ello. Si la velocidad fuese proporcional al espacio recorrido, entonces veríamos que espacios diferentes se recorrerían en intervalos de tiempo iguales; si, por lo tanto, la velocidad con la cual el cuerpo que cae recorre un espacio de ocho pies fuera el doble de la que tiene al recorrer los cuatro primeros pies (así como una distancia es el doble de la otra) entonces los intervalos de tiempo requeridos para estos recorridos serían iguales. Pero que uno y un mismo cuerpo caiga ocho pies y cuatro pies en el mismo tiempo sólo es posible en el caso de que el movimiento sea instantáneo; pero la observación nos muestra que el movimiento de caída de un cuerpo tarda cierto tiempo, y es menor el tiempo que requiere para recorrer una distancia de cuatro pies que una de ocho; por lo tanto, no es cierto que su velocidad sea proporcional al espacio recorrido.

"La falsedad de la otra proposición (de que la cantidad de movimiento o el impulso de un cuerpo se duplica al caer desde una altura doble) puede ser demostrada con igual claridad, dado que el impulso o la cantidad de movimiento es directamente proporcional a la velocidad."

Es interesantísimo y sumamente ingenioso el razonamiento mediante el cual Galileo rechaza por imposible su propia hipótesis de que los cuerpos al caer adquieren una velocidad proporcional a la distancia. Creemos que el razonamiento de Galileo para desechar tal hipótesis no es del todo correcto; en efecto, si la velocidad es proporcional a la distancia y si suponemos que en un instante inicial ($t = 0$) la velocidad es 0 y el camino recorrido cero, tendremos que, para un cierto tiempo muy pequeño Δt, el camino recorrido $\Delta s = V_0 \cdot \Delta t = 0$ debido a que $V_0 = 0$. En consecuencia, para que las velocidades fueran proporcionales a las distancias, los cuerpos estarían flotando en el vacío y para caer se necesitaría un pequeño impulso inicial; luego, la distancia en función del tiempo, de acuerdo con la hipótesis indicada, estaría dada por una función exponencial. *

Según una biografía escrita por su alumno Viviani, cuando Galileo se encontraba en Pisa, aprovechando las condiciones favorables que le ofrecía la famosa torre de dicha ciudad, había realizado experiencias sistemáticas sobre caída de los cuerpos. Esto Galileo no lo menciona en ninguno de sus escritos. A pesar de ello, en la enorme mayoría de los libros de texto, entre las breves referencias a Galileo que contienen, aparece la no confirmada anécdota de Viviani como verdadera y un dibujo de la torre inclinada de Pisa. Dichos textos no hacen por lo general referencia concreta a los procedimientos que Galileo empleó en la investigación de las leyes fundamentales de la dinámica, lo que constituye, no solamente la parte más valiosa de su genial labor, sino el fundamento de la metodología científica.

Para suplir la indicada deficiencia de la mayoría de los textos de física transcribiremos algunos párrafos de sus Diálogos referentes a sus notables estudios sobre dinámica.[23c]

"...*Salviati*. Se tomó un pedazo de madera de alrededor de doce codos de largo, medio codo de ancho y tres dedos de espesor; sobre su canto se cortó un canal de poco más de un dedo de ancho, y este rebaje se hizo muy derecho, liso y pulido, y se forró con pergamino, también tan pulido y liso como fue posible; hicimos rodar sobre él una bola de bronce bien redonda, dura y lisa. Habiendo colocado esta tabla en una posición inclinada, levantando uno de sus extremos uno o dos codos más que el otro, dejamos rodar la bolilla, como estaba diciendo, a lo largo del canal, anotando en la forma que se describirá a continuación el tiempo en que hacia el descenso. Repetimos este experimento más de una vez con el propósito de medir el tiempo con una precisión tal que la desviación entre dos observaciones nunca excediese de un décimo de una pulsación. Habiendo efectuado esta operación y habiéndonos asegurado de haber tomado bien los datos, hicimos ahora rodar la bolilla solamente una cuarta parte de la longitud del canal, y habiendo medido el tiempo de su descenso, encontramos que era precisamente la mitad del primero. Luego ensayamos

---

*Admitiendo que $V = k \cdot s$ y sabiendo que, por definición, $V = \frac{ds}{dt}$ tenemos que $k \cdot s = \frac{ds}{dt}$. Separando variables: $k \cdot dt = \frac{ds}{s}$, e integrando: $C + kt = \ln s$; o sea: $s = e^{kt} \cdot e^{c}$.

otras distancias, comparando el tiempo invertido en el recorrido de la longitud total con el de la mitad o con el de dos tercios y de cualquier otra fracción; en tales experimentos, repetidos cientos de veces, encontramos que los espacios recorridos estaban entre sí como los cuadrados de los tiempos, y esto era cierto para todas las inclinaciones del plano, es decir, del canal a lo largo del cual rodaba la bolilla. También observamos que los tiempos del descenso para varias inclinaciones del plano están entre sí precisamente, como veremos más adelante, en la relación que el Autor había predicho y demostrado.

"Para la medición del tiempo empleamos un gran recipiente de agua colocado en una posición elevada, en la parte inferior de este recipiente estaba soldado un tubo de pequeño diámetro que daba un chorro delgado de agua, la que recogíamos en un vaso durante el tiempo de cada descenso, ya para la longitud completa del canal o para una parte de su longitud. El agua así recogida fue pesada después de cada descenso en una balanza muy precisa; las diferencias y las relaciones de estos pesos nos dieron las referencias y las relaciones de los tiempos, y esto con tanta aproximación que, a pesar de que la operación fue repetida muchas veces, no hubo discrepancia apreciable en los resultados."

Además Galileo había demostrado rigurosamente que el tiempo en el cual un cuerpo a partir de una posición de reposo con un movimiento uniformemente acelerado recorre una distancia dada es el mismo que requeriría para recorrer la misma distancia con una velocidad uniforme igual a la mitad de su velocidad final, y fue el primero en demostrar que la trayectoria de un proyectil era una parábola.

Con el rudimentario instrumental que hemos indicado consiguió Galileo concebir algunas de las leyes más importantes de la mecánica, pues las dos primeras leyes de la dinámica de Newton están claras, aunque implícitamente contenidas en sus escritos sobre mecánica, y es a él a quien hay que considerar como su descubridor.

2.2 Ley de la Caída Libre de los Cuerpos

Hemos transcrito una serie de párrafos de la obra de Galileo referentes a sus trabajos sobre el péndulo y la caída de cuerpos por contener el origen de la dinámica y la metodología que dio nacimiento a la ciencia moderna. Además, son de un gran valor educativo.

Entre los principios que guiaban la actividad científica de Galileo figuraba el siguiente: "Medir todo lo que es medible y tratar de hacer medible lo que aún no es medible". Para medir una determinada magnitud física es necesario descubrir con precisión el procedimiento que debe seguirse, en cada caso, para efectuar la correspondiente medición. Se ha citado la descripción minuciosa que diera Galileo del procedimiento que siguió para medir el tiempo. A estas descripciones precisas del procedimiento de medida de una cantidad física es lo que se llama la definición operacional de la misma, según una feliz designación del famoso físico norteamericano Percy William Bridgman (1882-1961), premio Nobel de física en 1946 y activo partidario del operacionalismo en filosofía de la ciencia. Consideramos que Galileo, a semejanza de aquel famoso personaje de Molière en su obra "El Burgués Gentilhombre", que habla prosa sin saberlo, y a base de su principio, enunciado más arriba y de sus descripciones precisas de los procedimientos de mediciones, es el precursor del operacionalismo moderno. Para comprobar una teoría es necesario deducir relaciones entre cantidades físicas medibles de acuerdo con procedimientos bien determinados; es decir, que tengan definiciones operacionales. En caso contrario, las teorías no podrían ser combrobadas experimentalmente.

Pasemos ahora a sintetizar la parte fundamental de las investigaciones de Galileo sobre la caída de cuerpos.

De la observación y la experimentación referentes al movimiento de los cuerpos, Galileo concibió que, para poderlo describir con precisión, era necesario primeramente definir de manera operacional ciertas nociones y conceptos, como por ejemplo, la velocidad y la aceleración con respecto a un determinado sistema de referencia. Hemos transcrito las definiciones dadas por Galileo de las nociones indicadas, así como también las relaciones matemáticas que se pueden establecer entre ellas (pág. 48). De las definiciones dadas, se puede establecer, como hemos visto, la siguiente conclusión condicional: si un móvil se mueve sobre una recta con movimiento uniformemente acelerado, partiendo de un punto de ella que se toma como origen de la distancia recorrida y con velocidad nula en el tiempo $t = 0$, la distancia recorrida se expresa:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad [19]$$

siendo s el espacio recorrido; a la aceleración y t el tiempo. El aserto anterior es meramente formal, no se afirma nada con respecto a ningún movimiento que tiene lugar en el mundo físico. Expresa solamente una relación matemática. Ahora, bien, si queremos analizar si el movimiento de caída libre se caracteriza o no por tener una aceleración constante, es necesario primero definir las relaciones operacionales que existen entre los símbolos de [19] y los datos que se obtengan de experimentos referentes a la caída libre de los cuerpos. Es decir, debemos precisar cómo se miden el espacio s y el tiempo t (véase pág. 63) donde se describen los famosos experimentos de Galileo con el plano inclinado). Si los datos experimentales indican que, salvo errores de observación y de medición inevitables, los espacios recorridos son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos, queda comprobado experimentalmente que el movimiento de caída con rozamiento nulo, a lo largo de un plano inclinado, tiene aceleración constante.

2.3 Movimiento de Proyectiles

Galileo fue también el primero que analizó científicamente el movimiento de proyectiles. Pasaremos a sintetizar sus estudios sobre el tema. [20]

Consideremos un plano sobre el cual un cuerpo se mueve con velocidad uniforme a lo largo de la línea ab (Fig. 24).

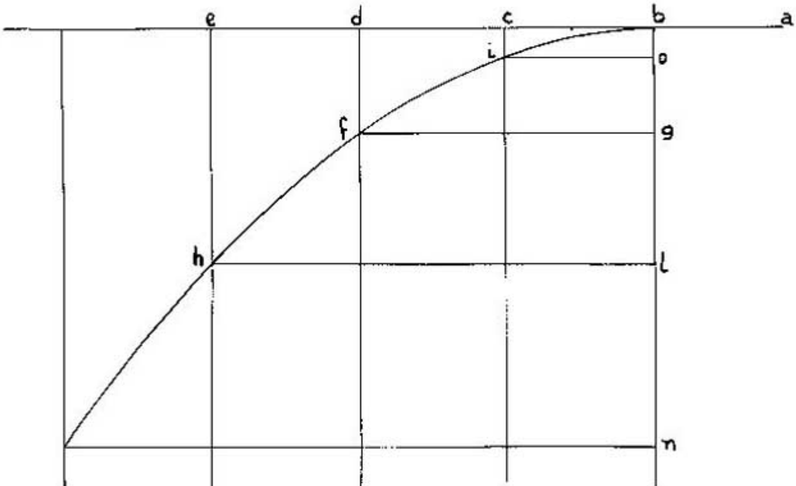


Fig. 24

Supongamos que el plano termina abruptamente en b; luego en este en este punto el cuerpo, en virtud de su peso, adquirirá también un movimiento natural descendente a lo largo de la perpendicular. Dibujemos la recta bc, prolongación de la línea ab. Dividamos la recta bc en segmentos iguales bc, cd, de, que representan iguales intervalos de tiempo. Desde los puntos c, d y e bajemos líneas paralelas a bn. Sobre la primera tomemos una distancia ci (correspondiente a lo que el cuerpo cae en el intervalo de tiempo necesario para que el móvil, con velocidad horizontal constante, recorra el segmento bc); sobre la segunda, una distancia cuatro veces mayor, df; sobre la tercera, una distancia nueve veces mayor, y así sucesivamente en proporción a los cuadrados de cb, db, eb. Por lo tanto, vemos que mientras el cuerpo se mueve de b a c con velocidad uniforme, cae también perpendicularmente la distancia ci, y al final del intervalo de tiempo que tardaría en recorrer bd, que es el doble de bc, la caída vertical será cuatro veces la distancia ci, dado que se ha comprobado que la caída libre de un cuerpo varía como el cuadrado del tiempo. Consecuentemente, los puntos i, f, h se encuentran sobre una parábola.

Generalizando las consideraciones precedentes de Galileo, estudiemos el problema del lanzamiento de un proyectil que parte con velocidad inicial V_0, formando su dirección un ángulo α con su proyección en un plano horizontal (Fig. 25).

La componente horizontal de la velocidad inicial es $V_{0,x} = V_0 \cdot \cos\alpha$. Despreciando la resistencia del aire, la componente horizontal de la velocidad es independiente del tiempo, es decir, constante.

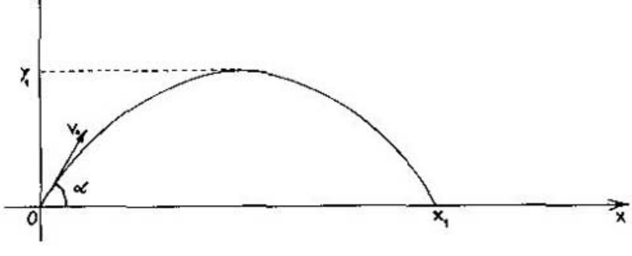


Fig. 25

Como la aceleración en el movimiento vertical es negativa $(-g)$ y la componente vertical de la velocidad inicial es $V_{o,y} = V_o \cdot \text{sen}\,\alpha$, obtenemos, teniendo en cuenta la expresión de la velocidad en el movimiento uniformemente retardado [16], que la componente vertical de la velocidad es:

$$V_y = V_o \cdot \text{sen}\,\alpha - gt$$

En un tiempo t, el proyectil recorrerá una distancia a partir del origen (Fig. 25):

$$x = V_o \cdot \cos\alpha \cdot t \qquad [20]$$

En el mismo intervalo, en el eje vertical recorrerá una distancia:

$$y = V_o\, \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad [21]$$

Reemplazando en [21] el valor de t dado por la relación [20], tenemos:

$$y = V_o\, \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{x}{V_o \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_o \cos\alpha} \right)^2$$

o sea:

$$y = \text{tg}\,\alpha \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_o^2 \cos^2\alpha} \qquad [22]$$

Como el ángulo α es constante, vemos que en el tiro oblícuo la trayectoria del proyectil se expresa por una parábola. El proyectil alcanzará la altura máxima cuando la velocidad vertical sea nula:

$$V_o \cdot \text{sen}\,\alpha - gt = 0$$

Es decir, que la altura máxima la alcanzará en el tiempo

$$t = \frac{V_o\, \text{sen}\,\alpha}{g}$$

Para encontrar el valor de la altura máxima debemos reemplazar este valor de t en [21], o sea:

$$y_{máx} = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g}$$

Si deseamos obtener el alcance horizontal del tiro, debemos determinar primeramente el intervalo de tiempo requerido para que el valor de y vuelva a ser cero; es decir, resolver la ecuación:

$$V_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

Esta ecuación tiene la raíz $t = 0$ (instante en que se dispara el proyectil) y además la:

$$t = \frac{2 V_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

Para determinar el alcance horizontal del proyectil debemos ahora reemplazar este valor de t en [20], es decir:

$$x_1 = \frac{2 V_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}$$

Teniendo presente la relación trigonométrica:

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \operatorname{sen} 2 \alpha$$

podemos escribir que el alcance horizontal en un tiro inclinado viene dado por:

$$x_1 = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen} 2 \alpha,$$

y como el seno alcanza su valor máximo, uno, cuando el argumento es $\frac{\pi}{2}$, tenemos que x_1 será máximo cuando la velocidad inicial forme un ángulo $\frac{\pi}{4}$ con su proyección en el plano horizontal.

Problemas

1. Calcular qué velocidad inicial, expresada en m/s, debe tener un proyectil para que, al ser lanzado con un ángulo de $\alpha = 60^\circ$, alcance la distancia de un kilómetro. Representar la trayectoria a escala.

2. Demostrar que el alcance de un proyectil con velocidad inicial V_0, es el mismo para los ángulos de inclinación $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \theta$ y $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \theta$, siendo $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

3. Determinar: a) el punto de la trayectoria del problema 1 en que se encontraría el proyectil después de un segundo de ser disparado; b) el vector velocidad tangencial correspondiente a dicho punto.

3. GENIALIDAD DE LA OBRA DE GALILEO

¿Dónde reside la originalidad verdaderamente genial de la obra de Galileo? Habíamos recordado que para Aristóteles, cuya influencia predominante trasciende hasta los tiempos de Galileo, lo fundamental en la ciencia era la clasificación, en tanto que para Galileo son las relaciones entre las medidas. Recordamos también que el medir las informaciones obtenibles del mundo físico había sido hecho ya bastante bien por los antiguos, quienes habían desarrollado la geometría, la estática y la hidrostática, pero toda las mediciones que éstos efectuaron fueron de esquemas estáticos del mundo exterior. Lo característico y nuevo en Galileo fue medir lo cambiante, extraer de la observación del movimiento los números que lo caracterizan y poder formular así las leyes que lo rigen. Además, para poder apreciar en toda su magnitud la importancia de los trabajos de Galileo debe recordarse que las leyes de la dinámica, no sólo son básicas para la física, sino también para toda la ciencia. El famoso físico alemán Hermann Helmholtz (1821 - 94) sostenía que toda ley debe surgir de las leyes del movimiento. Pero lo que es mucho más importante que las leyes descubiertas por Galileo, es la metodología que emplea, la que se caracteriza por la íntima vinculación de la experimentación a la matemática. Esta alianza constituye el rasgo más característico de toda la ciencia moderna, la que comienza, lo repetimos, con Galileo. Gracias a esta metodología, el conocimiento es susceptible de constantes progresos y perfeccionamientos. Es por eso que creemos que la creación más importante de la cultura occidental es la metodología de la ciencia moderna.

Cuando Galileo, en prisión y ya ciego, dictaba a sus amanuenses sus trascendentales investigaciones sobre mecánica, fue visitado por el genial poeta John Milton, entonces en plena juventud, y a quien más tarde el destino le deparó vejez similar a la de Galileo. Sin duda esta patética visita debe haber encendido el espíritu del inmortal poeta inglés con el pensamiento de que "la más valiosa de todas las libertades es la de poder pensar libre de dogmas", y quizás también el recuerdo del sabio ciego y preso contribuyó a inspirarle a dictar, después de haber perdido la vista, su magistral y exquisito poema.

Se han tratado unos pocos de los trascendentales trabajos de Galileo con algún detalle debido a que, como lo expresara Albert Einstein: [22] "El descubrimiento y uso del razonamiento científico por Galileo fue una de las más importantes conquistas en la historia del pensamiento humano, y marca el comienzo real de la física. Este descubrimiento nos enseñó que las conclusiones intuitivas basadas en observaciones inmediatas no siempre deben ser tenidas por seguras, debido a que algunas veces conducen a caminos equivocados"... "La transición de la línea de pensamiento de Aristóteles a la de Galileo constituye la etapa más importante en la fundamentación de la ciencia. Una vez que esta transición fue hecha, la línea del desarrollo ulterior fue clara."

Antes de que transcurriera un año de la muerte del genial toscano, nacía en una humilde y tranquila aldea inglesa Isaac Newton (1643-1727), quien evidenció en toda su amplitud la maravillosa obra científica de Galileo al revelar, gracias a ella y a su imaginación genial, la sublime armonía que rige al mundo inanimado.

4. GALILEO Y LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS FISICAS

Los experimentos con respecto al péndulo y plano inclinado que realizó Galileo y que hemos descrito con sus propias palabras, constituye uno de los tantos hermosos ejemplos que se encuentran en las obras de los creadores de la ciencia y que deben ser usados para orientar la enseñanza de la misma.[2,11-13,34,53,54] Los referidos experimentos debieran ser repetidos por los alumnos al entrar en la escuela secundaria, no a modo de una guía minuciosa que indicara paso a paso qué es lo que deben hacer y qué es lo que deben observar -- experimentos realizados en esa forma pueden servir para producir cocineras o técnicos que repiten sin comprender un conjunto de manipulaciones -- sino con un espíritu análogo al del investigador original, es decir, tratando de aprender mientras se experimenta. El estudiante debe cultivar un hábito análogo al del explorador de una región ignota: aprender a orientarse y a describir las cosas y fenómenos imprevistos que aparecen. Los experimentos que hemos recordado de Galileo son sumamente sencillos de realizar con material simplísimo. Por ejemplo, para experimentar con el péndulo basta un hilo, una piedra o una tuerca y un clavo para sujetar el extremo del hilo. Repetimos, lo importante es que el alumno no aprenda meramente las conclusiones a que llegó, por ejemplo Galileo o cualquier otro hombre de ciencia, sino que, con la guía inteligente del profesor, pueda rehacer los correspondientes experimentos y llegar a conclusiones análogas a través de los resultados que ellos mismos obtengan. Esto es muy fácil de decir y también, aparentemente, de comprender, pero a pesar de ello lo repetimos, porque constatamos con harta frecuencia lo mal que, por lo general, se enseña la física aun en muchos lugares que disponen de variado y rico material de experimentación. En efecto, en la mayoría de los institutos de enseñanza de distinto nivel que conocemos en América Latina, se sigue el método recomendable, por ejemplo, para una escuela de choferes o de cocineros: primero se enseñan las "normas teóricas" y luego se hacen ejercicios prácticos y experimentales. Los cursos de física en la escuela secundaria y en la primera etapa del ciclo básico universitario debieran ser teórico-prácticos en los que los experimentos se realizan para extraer datos y conclusiones que permitan hacer generalizaciones y elaborar las teorías pertinentes, y no para verificar los resultados de consideraciones teóricas. La teoría y la experimentación deben apoyarse y estimularse recíprocamente y en las primeras etapas de la enseñanza, insistimos, debe ponerse mayor énfasis en la experimentación. Sólo en cursos más avanzados, después que el estudiante ha aprendido mediante una amplia ejercitación a valorar la importancia que tienen la observación y la experimentación en la génesis de conceptos, hipótesis y teorías, deben enseñarse los cursos de física teórica o de física matemática.

El ceñirse estrictamente a los procedimientos de experimentación y teóricos de la ciencia es tarea nada fácil. Por lo general, se deslizan ciertos prejuicios en algunas de las interpretaciones o se extrapola más allá de lo estrictamente permitido por el rango de validez de los experimentos en que se basa la correspondiente teoría. Aun personas geniales como Galileo cometieron errores de extrapolación en algunas de sus conclusiones. Veamos, por ejemplo, la siguiente: Al calcular el tiempo que tardaría una piedra en alcanzar la Tierra si se dejara caer libremente desde una distancia igual a la que se encuentra la Luna, Galileo halló que dicho tiempo sería de tres horas veintidós minutos y cuatro segundos, mientras que, hasta entonces, se consideraba que debía ser mayor de seis días. Aunque Galileo basa sus cálculos en los datos de prolijos experimentos, realiza implícitamente la extrapolación no respaldada por las observaciones que él había hecho, de que el campo gravitatorio de la Tierra no varía con el alejamiento de ésta. Esta misma generalización la vuelve a hacer también implícitamente al estudiar el movimiento de una piedra que se dejara caer libremente desde la superficie por un tubo ideal que atravesara la Tierra pasando por su centro. Galileo admitía que los cuerpos son atraídos hacia el centro de la Tierra, y por lo tanto la piedra alcanzaría su máxima velocidad al pasar por dicho centro, y que al alejarse de él su velocidad iría disminuyendo hasta anularse al llegar al punto antípoda del de partida. Por todo esto se ve que Galileo ya está rozando los conceptos de la gravitación universal. También llega a ver que dicho movimiento debía ser similar al de un péndulo, pero al calcular la velocidad de la piedra a lo largo del tubo, volvió a admitir en forma implícita que la fuerza se mantenía constante en valor absoluto y que cambiaba de sentido en el centro de la Tierra en forma discontinua. Indudablemente que estos escritos de Galileo, a pesar del error indicado, deben haber asistido más a Newton en su maravillosa concepción de la ley de la gravitación universal que la manzana del famoso cuento anecdótico.

5. MECANICA NEWTONIANA

La ciencia es un proceso acumulativo a lo largo del tiempo y de las revoluciones que se han realizado en sus teorías. Los grandes hombres de ciencia y aun los genios basan gran parte de sus descubrimientos y creaciones en la acumulación de datos y en los trabajos de síntesis de los científicos de épocas anteriores o contemporáneos. Por eso, para comprender la génesis de la ciencia es necesario conocer la historia del desarrollo científico. Por supuesto que en el progreso científico no existe un determinismo que permita predecir, a partir del estado actual de la ciencia, cuáles serán los próximos adelantos. Ni en las llamadas ciencias exactas (física, astronomía, química) existe un determinismo riguroso. Las concepciones y creaciones de algunos hombres de excepción, así como también el azar, pueden cambiar de manera imprevista el rumbo del desarrollo científico. Pero aun así, los nuevos e imprevistos rumbos estarán basados en gran parte en las contribuciones que ya poseía la ciencia. Con una extremada expresión de modestia, declaró Newton en cierta ocasión que su único mérito era haber trepado a los hombros de los gigantes que le precedieron, y que cuando llegó al último hizo un esfuerzo para elevar algo más su cabeza. Para realizar la sublime síntesis de la mecánica, Newton necesitó, además de apoyarse en Galileo y en los trabajos de otros notables científicos, la genialidad que caracteriza su inmortal y trascendental obra. Los "*Principia Mathematica Philosophia Naturalis*" es uno de los libros más extraordinarios que se han escrito. En él se encuentran las leyes fundamentales de la mecánica y la de la gravitación universal, que explican los movimientos de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas, sin exceptuar el movimiento de los astros. Dichas leyes [1,24,52,53,83] constituyen, además, los gérmenes de una de las revoluciones más importantes de la historia: la Revolución Industrial.

5.1 Leyes Generales del Movimiento

Ya hemos indicado que a partir de los datos suministrados por la experimentación, el investigador construye conceptos (por ejemplo, los de espacio, desplazamiento, tiempo, relatividad, aceleración, etc.). ¿Son estos conceptos abstracciones de los fenómenos estudiados o son creaciones del experimentador? Los conceptos son la resultante de la interacción de la mente activa del investigador con los datos de la observación y la experimentación; son, por consiguiente, parcialmente fruto de la actividad creadora del investigador. En este sentido la definición de un nuevo concepto constituye una invención más bien que un descubrimiento. Luego, mediante la adopción de un simbolismo adecuado, se crean hipótesis, axiomas, postulados o leyes generales de los cuales se puede deducir, a manera de teoremas, las leyes particulares, dentro del campo en el que pueda tener validez el conjunto de axiomas establecidos primeramente en forma de hipótesis de trabajo.

Partiendo de las definiciones de velocidad y aceleración y de las leyes particulares sobre movimiento dadas por Galileo, ideó Newton otras definiciones complementarias y formuló las tres leyes (o axiomas) fundamentales de la mecánica newtoniana o clásica. El conjunto de dichas leyes generales, más las definiciones de las nociones físicas que intervienen en las mismas, constituyen una síntesis científica extraordinaria. En efecto, ellas son la base de una teoría que explica el movimiento de los cuerpos tal como el de un objeto que cae, el de un proyectil disparado en una cierta dirección y con un ángulo dado, el de las distintas partes de una máquina, etc. La teoría de Newton se aplica tanto a la descripción del movimiento de los cuerpos de tamaño mediano que vemos y utilizamos en nuestra vida diaria, como también al estudio del movimiento de los cuerpos celestes.

Las tres leyes generales de Newton son: [44]

LEY I

"Todo cuerpo persiste en su estado de inmovilidad o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas que actúen sobre él." "Los proyectiles persisten en sus movimientos mientras no sean retardados por la resistencia del aire, o impulsados hacia abajo por la fuerza de la gravedad. Un trompo, cuyas partes, por su cohesión, están perpetuamente apartadas del movimiento rectilíneo, no cesa en su rotación a menos que sea retardado por el aire. Los grandes cuerpos de los planetas y cometas, encontrándose con menos resistencia en espacios más libres, conservan su movimiento ... por un tiempo más largo."

LEY II

"La aceleración del movimiento es siempre proporcional a la fuerza actuante, y se produce en la dirección de la recta en que dicha fuerza actúa." "Si una fuerza genera un movimiento, una fuerza doble lo duplicará, una fuerza triple hará que el movimiento se triplique ... y este movimiento (tiene siempre la dirección de la fuerza generadora), si el cuerpo se movía antes, es sumado al movimiento anterior o restado de él, según que ambos tengan la dirección o dirección contraria; u oblícuamente (según la suma geométrica de vectores)* de manera de producir un nuevo movimiento compuesto de los dos referidos."

LEY III

"A toda acción se opone siempre una reacción igual: o bien, las acciones mutuas de dos cuerpos, cada uno sobre el otro, son siempre de intensidad igual y de dirección contraria". "Cualquier cosa que tire de otra, o la presione, es igualmente tirada o presionada por la otra. Si Ud. presiona una piedra con el dedo, el dedo también es presionado por la piedra. Si un caballo tira de una piedra atada por una cuerda, el caballo (si puedo así expresarme) será igualmente tirado hacia atrás, hacia la piedra; porque la cuerda tensa, tirará tanto al caballo hacia la piedra como a ésta hacia el caballo.... Si un cuerpo choca con otro, y por su impacto cambia el movimiento del otro, el movimiento del primero también (debido a la igualdad de las presiones mutuas) experimentará un cambio igual hacia la parte contraria. Los cambios debidos a estas acciones son iguales, no en lo que atañe a las velocidades sino al movimiento de los cuerpos; es decir, si los cuerpos no están dificultados por cualquier otro impedimento. Para que los movimientos sean igualmente cambiados, los cambios de las velocidades efectuados hacia las partes contrarias son inversamente proporcionales a los cuerpos." **

Más adelante veremos que la última parte de lo dicho por Newton en el párrafo final de su tercera ley se expresa con la terminología de la física contemporánea de la siguiente manera: en un choque entre dos cuerpos la variación de la cantidad de movimiento del uno es igual y contraria a la variación de la cantidad de movimiento del otro.

---

* Lo expresado entre paréntesis es una aclaración nuestra.

** Del texto de Newton surge claramente que por cuerpo debe entenderse aquí masa del cuerpo.

La segunda ley de Newton indica que la alteración del movimiento rectilíneo y uniforme es proporcional a la fuerza que la produce. Dicha alteración se expresa por el cambio que experimenta el vector velocidad en la unidad de tiempo, o sea la aceleración. Esta puede producirse por una fuerza que actúa en la misma dirección del movimiento rectilíneo (como el caso estudiado por Galileo, que hemos considerado en páginas anteriores, de la caída libre de un cuerpo), o mediante una fuerza que actúa oblícuamente a la dirección del movimiento; en este caso la aceleración estaría dada por un vector que tuviese la misma dirección de la fuerza. En general, la segunda ley de Newton se expresa:

$$\text{Fuerza} = \text{constante} \times \text{aceleración} \qquad [23]$$

y a la constante de proporcionalidad se le llama masa del cuerpo considerado.

Según la segunda ley de Newton, una misma fuerza que actuase sobre diferentes cuerpos produciría cambios de sus velocidades inversamente proporcionales a las masas respectivas.

Hemos visto (pág. 51) que la aceleración se expresa:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad [24]$$

De la segunda ley de Newton y de la definición de aceleración surge fácilmente como corolario la primera ley.

Dejamos al lector la demostración detallada de ésta.

5.2 Significado de las Dos Primeras Leyes de Newton

Para que una ley física tenga significado es necesario que los términos físicos que intervienen en ella tengan significado operacional; es decir, que se indique explícita y claramente qué operaciones es necesario efectuar para determinar, en cada caso, su valor. Cuando se conocen estas operaciones se dice que el término o concepto considerado está definido operacionalmente. Por ejemplo, diremos que la noción de peso específico tiene una definición operacional, puesto que, explícita o implícitamente se conoce el procedimiento físico concreto para medir, en cada caso, el peso y el volumen de un cuerpo determinado; luego el peso específico se expresa por la razón del peso al correspondiente volumen. Bridgman [8,26,27] considera que la definición de un concepto debe implicar el conjunto de operaciones necesarias para poder medirlo.

Ahora bien, ¿cuál es el significado operacional de movimiento rectilíneo y uniforme en la primera ley de Newton? Newton consideraba que un cuerpo conserva su velocidad rectilínea y uniforme con respecto al espacio absoluto; pero, ¿cómo podemos fijar un sistema de coordenadas con respecto al supuesto espacio absoluto? Esto es imposible. Las dos primeras leyes de Newton necesitan pues una definición operacional de "movimiento rectilíneo y uniforme".

Para poder dar tal definición es indispensable definir primeramente un sistema de coordenadas concreto con respecto al cual las leyes de Newton se puedan verificar experimentalmente. Ernst Mach [42] puntualizó que las leyes de Newton no deben referirse al espacio absoluto, sino a un sistema de coordenadas definible físicamente, como, por ejemplo, un sistema fijo con respecto a las estrellas más lejanas, las que se consideran fijas, pero que en realidad están también en movimiento. Por lo tanto, la primera ley de Newton debe expresarse así: "todo cuerpo material, sobre el que no actúa fuerza alguna, continuará en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme con referencia a un sistema fijo con respecto a las estrellas más lejanas". En la segunda ley de Newton también debe incluirse el sistema de referencia de las estrellas más lejanas, con respecto al cual se determina la aceleración producida por una fuerza. Sin un sistema de referencia definible físicamente, las dos primeras leyes de Newton no tienen sentido, pues no se podría determinar experimentalmente si están de acuerdo o no con los datos experimentales. En cada caso se podría determinar un sistema de referencia con respecto al cual un movimiento arbitrario sería rectilíneo y uniforme. Es fácil ver que si las dos primeras leyes de Newton se cumplen para un sistema de referencia fijo con respecto a las estrellas lejanas, también se cumplirán para cualquier sistema de ejes que se mueva con movimiento rectilíneo y uniforme con respecto al primero. Los sistemas de coordenadas con respecto a los cuales las leyes de Newton son válidas se llaman inerciales o galileanos.

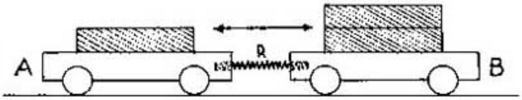
Las primeras experiencias que realizó Galileo con esferas que se desplazaban prácticamente sin rozamiento sobre planos lisos horizontales, lo llevaron a expresar por primera vez la ley de la inercia. Es decir, que en ciertos experimentos uno podría suponer que un sistema de ejes inmóvil con respecto a la Tierra fuera un sistema inercial. Indudablemente, si en los referidos experimentos de Galileo se considera ilimitado en todas direcciones el plano sobre el que se deslizan las esferas sin rozamiento, se obtendrán desviaciones acentuadas y crecientes de la ley de la inercia. En un plano horizontal limitado, la acción del campo gravitatorio es perpendicular al mismo y se anula con la rigidez del plano indicado, en base al principio de acción y reacción. Pero si el plano se prolonga, la acción de dicho campo deja de ser perpendicular al mismo y consecuentemente actúa sobre las esferas consideradas una componente que yace en el plano. Observaciones más minuciosas nos prueban que la Tierra tiene un movimiento de rotación con respecto a las estrellas lejanas y, por lo tanto, se llega a considerar que un sistema de referencia fijo con respecto a las estrellas más lejanas puede constituir un sistema inercial; es decir, con respecto al cual se cumplen las dos primeras leyes de Newton. De acuerdo con lo que hemos expresado, resulta que la ley de inercia es una ley empírica que permite su comprobación experimental (con respecto al sistema inercial que hemos definido operacionalmente más arriba). De esta manera la ley de inercia pierde todo valor absoluto (debido a que las mencionadas estrellas fijas se mueven en realidad) y adquiere, como todas las leyes físicas, un valor sólo aproximadamente verdaderó.

5.3 Definición Operacional de Masa

Galileo fue el primero en dar una definición operacional de la masa de un cuerpo. De acuerdo con él dos cuerpos tienen igual masa cuando al chocar uno con otro en tanto se muevan con velocidades iguales y de sentido contrario, después del choque presentan iguales cambios de velocidad. Dicha definición nos proporciona un procedimiento para saber cuando dos masas son iguales. Experimentos de este tipo son muy fáciles de realizar con esferitas o bolitas de igual tamaño y de masa diferentes que se deslizan a lo largo de una ranura formada, por ejemplo, por dos reglas. También se pueden realizar mediante dos carritos (Fig. 26) en los que se puedan poner cargas diferentes y, mediante un resorte, se les proporcione un mismo impulso en un determinado instante. Cuando la masa total de uno de los carritos cargados es el doble de la del otro, la velocidad adquirida por el primero será la mitad de la del segundo. Es fácil ver que la tercera ley de Newton implica una generalización del procedimiento operacional de Galileo para determinar la masa de un cuerpo con respecto a la del otro. Para que sea válido el proceso que hemos indicado de determinar la masa relativa de un cuerpo, el valor que se obtenga de la misma debe ser independiente del impulso que le proporcione a los dos cuerpos el resorte o una determinada explosión. Es conveniente verificar los valores de las masas relativas que se obtienen para diferentes valores del impulso aplicado en el experimento indicado en la figura 26.

Fig. 26

Al soltarse el resorte, por ejemplo, al quemar un hilo que lo mantiene comprimido, los carritos A y B partirán con distintas velocidades. Si se los detiene en un determinado instante, las masas de los carritos estarán en relación inversa a las distancias recorridas. Probar esta afirmación experimentalmente y basándose en la tercera ley de Newton.



5.4 Fuerza Cinética

La relación [23] proporciona una definición cinética de fuerza. En la página 31 hemos dado una definición estática de fuerza. ¿Cómo relacionamos ambas definiciones? Mediante un resorte calibrado de acuerdo con lo dicho en la página 32 construimos un dinamómetro para medir los pesos de los cuerpos y, consecuentemente, como se explicó, las fuerzas estáticas que puedan actuar sobre un cuerpo en cualquier dirección. Supongamos ahora que aplicamos el mismo resorte al hilo, mediante el cual aplicamos una fuerza a un cuerpo cuya masa deseamos determinar y que yace en un plano horizontal sobre el que puede deslizarse sin rozamiento. La mencionada fuerza aplicada producirá una aceleración, según la segunda ley de Newton. Aplicando distintas fuerzas f_1, f_2, $f_3, \ldots, f_n$ al mismo cuerpo, éste adquirirá las aceleraciones a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$. La segunda ley de Newton expresa que $\frac{f_1}{a_1} = \frac{f_2}{a_2} = \frac{f_3}{a_3} = \ldots =$ constante, y el valor de la constante así determinado se llama masa inercial. El valor de las fuerzas f_1, f_2, $f_3, \ldots, f_n$ suponemos que lo medimos con el dinamómetro unido al hilo que trasmite la fuerza al cuerpo considerado. 79

Con esta definición de fuerza se puede verificar experimentalmente la segunda ley de Newton, puesto que son medibles tanto las fuerzas como las aceleraciones que las mismas producen en un cuerpo.

5.5 Masa Gravitatoria y Masa Inercial

Consideremos la fuerza que actúa sobre un cuerpo que cae libremente como el peso de dicho cuerpo. Como la aceleración en la caída libre es igual a g (la aceleración debida a la gravedad), podemos escribir:

$$\frac{P}{g} = m_g = \text{masa gravitatoria} \qquad [25]$$

La masa determinada mediante la segunda ley de Newton en la sección 5.3 de este capítulo, la hemos denominado masa inercial, m_i.

Para que el valor de la masa gravitatoria sea igual al de la masa inercial debemos probar experimentalmente que se cumplen las relaciones:

$$m_g = \frac{P}{g} = \frac{f_1}{a_1} = \frac{f_2}{a_2} = \frac{f_3}{a_3} = \dots = m_i \qquad \frac{f_n}{a_n} = m_i = m$$

Los resultados experimentales prueban esta igualdad; es decir, que la masa de un cuerpo determinada estáticamente mediante la fuerza de la gravedad es igual a la determinada mediante la aplicación de la segunda ley de Newton, haciendo actuar sobre el mismo cuerpo una fuerza cualquiera. Este es un resultado muy importante que, por cierto, no es nada obvio, pues la operación de pesar un cuerpo es por completo diferente a la de determinar la relación inversa de las aceleraciones que una misma fuerza produce en el cuerpo considerado y en otro cuya masa se toma como unidad (1 gramo masa). En el caso del peso ($P = m \cdot g$), g es constante, o sea independiente de la masa y no se altera por grande que ésta sea. En el caso de que se sometan dos cuerpos de

diferentes masas, m_1 y m_2, a la acción de una misma fuerza, según la segunda ley de Newton tendremos que el primer cuerpo experimentará una aceleración $a_1 = \frac{f}{m_1}$; y el segundo $a_2 = \frac{f}{m_2}$. Vemos pues que, a medida que la masa del cuerpo crece indefinidamente, la aceleración que experimenta tiende a cero; es decir, que tendremos $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ (la relación de las aceleraciones está en relación inversa a la de las masas). Esta relación puede usarse como una definición operacional de la relación de masas.

5.6 Ley de la Gravitación de Newton

De lo expresado resulta que el campo gravitatorio es un campo de fuerza muy especial (dado que la aceleración que experimenta cualquier cuerpo es independiente de su masa). Newton resolvió esta dificultad partiendo de la hipótesis de que la fuerza gravitatoria que actúa sobre un cuerpo es proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir:

$$f = G\frac{Mm}{r^2} \qquad [26]$$

donde G es la constante de la gravitación universal; M la masa (por ejemplo de la Tierra) que origina el campo gravitatorio y m

la masa del cuerpo que se coloca en dicho campo. De [26] obtenemos:

$$\frac{f}{m} = G\frac{M}{r^2} \qquad [27]$$

esta relación para valores grandes de r y distancias comparativamente pequeñas con respecto a r, es constante con suficiente aximación.

De [27] podemos escribir, para distancias comprendidas dentro de una altura h sobre la superficie de la Tierra:

$$\frac{GM}{r^2} = g = \text{constante} \;\; (\text{para}\; h \ll r)$$

siendo r en este caso el radio de la Tierra.

En la expresión de la ley de la gravitación, Newton postula implícitamente que la masa gravitatoria de un cuerpo es igual a la masa inercial del mismo. Este postulado implícito, que no es fácil de comprender, es confirmado por la experiencia. Albert Einstein,[15,20,28,37,41] en 1911, expone las nociones fundamentales de una nueva teoría de la gravitación basada en la hipótesis de la equivalencia de las fuerzas de gravitación y las fuerzas inerciales, conocida como el "principio de equivalencia" de Einstein. De este principio surge de manera inmediata, clara y elegante la identidad de la masa gravitatoria y de la masa inercial. Antes de Einstein, la igualdad entre la masa inercial y gravitatoria de un cuerpo constituía un hecho comprobado experimentalmente, pero no comprendido: era un hecho misterioso.

5.7 Relatividad de la Mecánica Newtoniana

Consideremos dos sistemas inerciales S y S' (Fig. 27) de manera que el segundo se mueva a lo largo del eje comun x, con respecto al primero, con velocidad v. Sean además los ejes y, z, paralelos respectivamente a los ejes y', z'.

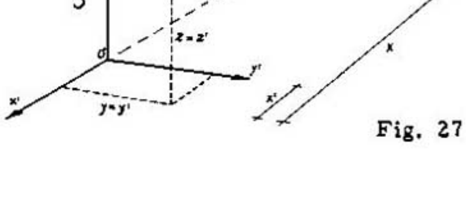


Fig. 27

Supongamos además que los observadores de los sistemas inerciales S y S' han sincronizado sus relojes, y que para $t = t' = 0$, los orígenes de los sistemas S y S' coinciden.

Admitamos que en el tiempo t, para un observador en S, se registra un suceso en el punto A de coordenadas x, y, z. Otro observador en S' registrará el mismo suceso en el instante t' y en el punto (x', y', z') con respecto al sistema referencial S'. Si admitimos que el ritmo de los relojes en los dos sistemas inerciales es el mismo, tendremos que $t = t'$. Un suceso en el espacio tridimensional queda definido con respecto a un sistema referencial por cuatro números (tres que fijan sus coordenadas espaciales y el cuarto que define el instante en que se produjo). ¿Cómo está relacionado el mismo suceso para dos observadores en los sistemas S y S'? Teniendo presente la figura 27 y lo que acabamos de expresar, podemos escribir las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ll} x' = x - v \cdot t & x = x' + vt' \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \\ t' = t & t = t' \end{array} \qquad [28]$$

Estas ecuaciones, que representan una transformación galileana, relacionan las coordenadas de un mismo suceso en dos sistemas inerciales. Hemos escrito t' y t para poner de manifiesto que en la mecánica newtoniana se admite implícitamente que la marcha de los relojes en los dos sistemas inerciales es igual ($t' = t$). Esto constituye una hipótesis implícita. En la teoría de la relatividad de Einstein $t \neq t'$.

Las ecuaciones [28] nos muestran que, para un observador fijo en S', el sistema S se mueve con velocidad $-v$ sobre el eje de las x'; mientras que para un observador fijo en el sistema S, el S' se mueve con velocidad v sobre el eje x. Salvo el cambio de signo, existe simetría entre los dos observadores en los sistemas S y S'. Ninguno de los dos observadores puede asegurar, a partir de sus observaciones respectivas, cuál es el que se mueve y cuál es el que está quieto.

Las aceleraciones de un cuerpo en movimiento determinadas con respecto a los sistemas inerciales S y S' serán iguales; por lo tanto, no existe experimento mecánico alguno que pueda ser efectuado por un experimentador en el sistema S o S' que permita determinar cuál en realidad es el sistema que se mueve. En esto radica la llamada relatividad de la física newtoniana.

6. LEYES DE CONSERVACION

Entre el conjunto de leyes físicas, las llamadas leyes de persistencia o de conservación tienen especial importancia. Estas leyes indican qué es lo que se mantiene invariable en lo cambiante de determinados procesos. En mecánica existen la ley de conservación de la cantidad de movimiento, la de conservación del momento de la cantidad de movimiento y la de conservación de la energía. Una ley de conservación ajena a la mecánica, es la de Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794), quien, mediante datos suministrados por la balanza, concluyó que, en una serie de reacciones químicas, aunque las substancias reaccionantes cambien de composición y de estado, la suma total de las masas antes y después de la reacción es constante. Esta ley sigue siendo de enorme importancia en química, a pesar de que Einstein probó que la masa total no es invariante, sino que, lo que no varía, es la energía total; pero en las reacciones químicas el equivalente en masa de la energía de reacción es despreciable respecto de la masa total considerada.

6.1 Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento

Supongamos que (Fig. 26) en un determinado instante, al soltarse el resorte o al ocurrir una explosión, se produce, en base a la tercera ley de Newton, una fuerza que actúa sobre el cuerpo A, $\vec{F}_A$, que es igual y de sentido contrario a $\vec{F}_B$ que actúa sobre el cuerpo B; es decir:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \qquad [29]$$

Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$\vec{F}_A = m_A \cdot \vec{a}_A; \qquad \vec{F}_B = m_B \cdot \vec{a}_B \qquad [30]$$

siendo m_A y m_B las masas de los cuerpos A y B y $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_B$ sus respectivas aceleraciones. Podemos ahora escribir la relación [29] de la siguiente manera:

$$m_A \cdot \vec{a}_A + m_B\vec{a}_B = 0 \qquad [31]$$

Llamemos Δt al intervalo durante el cual actúan las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ y V_A y V_B a las velocidades de los cuerpos A y B al comienzo del intervalo Δt (cuando las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ comienzan a actuar) y $\vec{u}_A$ y $\vec{u}_B$ a las correspondientes velocidades al término del intervalo Δt. Teniendo presente la definición de aceleración:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{u}_A - \vec{V}_A}{\Delta t} \qquad \vec{a}_B = \frac{\vec{u}_B - \vec{V}_B}{\Delta t} \qquad [32]$$

y reemplazando estos valores en la ecuación [31] y multiplicando ambos miembros por Δt, tenemos:

$$m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B = m_A \vec{u}_A + m_B \vec{u}_B \qquad [33]$$

El producto de la masa de un cuerpo por su velocidad se llama cantidad de movimiento; por lo tanto [33] expresa que la cantidad de movimiento total del sistema formado por los cuerpos A y B, antes de la interacción de las fuerzas F_A y F_B, es igual a la cantidad de movimiento después de la interacción indicada. La ecuación [33] representa la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. De las ecuaciones [30] y [32] podemos escribir:

$$F_A = \frac{m_A u_A - m_A V_A}{\Delta t}$$

o sea:

$$F_A \Delta t = m_A u_A - m_A V_A = \Delta m_A V_A \qquad [34]$$

El producto de una fuerza por el tiempo durante el cual actúa se llama impulso; por consiguiente [34] expresa que el impulso de una fuerza constante en un intervalo Δt, es igual a la variación o al incremento de la cantidad de movimiento. Si llamamos p a la cantidad de movimiento, la ecuación [34] se escribe:

$$F_A \Delta t = \Delta p_A \quad \therefore \quad F_A = \frac{\Delta p_A}{\Delta t} \qquad [35]$$

Esta última igualdad implica una forma muy conveniente de expresar la segunda ley de Newton. En efecto, podemos definir la fuerza como incremento de la cantidad de movimiento dividido por el tiempo en que se produce; por consiguiente, se producirá una fuerza si varía la masa o la velocidad o ambas cosas a la vez. Más adelante se dará un ejemplo concreto.

Como las velocidades se representan por vectores, también la cantidad de movimiento $\vec{p}$ será una magnitud vectorial. Si llamamos $V_{A,x}$, $V_{A,y}$, $V_{A,z}$ a las componentes de la velocidad $\vec{V}_A$ con respecto a los tres ejes de coordenadas y en forma análoga expresamos las componentes de los vectores $\vec{V}_B$, $\vec{u}_A$, $\vec{u}_B$, la ecuación vectorial [33] se expresará, en coordenadas cartesianas, por las tres ecuaciones siguientes:

$$m_A V_{A,x} + m_B V_{B,x} = m_A u_{A,x} + m_B u_{B,x}$$

$$m_A V_{A,y} + m_B V_{B,y} = m_A u_{A,y} + m_B u_{B,y} \qquad [36]$$
$$m_A V_{A,z} + m_B V_{B,z} = m_A u_{A,z} + m_B u_{B,z}$$

Es fácil generalizar este resultado al caso en que, en vez de dos cuerpos que interactúan, tenemos un sistema de cuerpos de masas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_s$, entre los cuales actúan solamente fuerzas interiores producidas por las mismas masas, con exclusión de toda fuerza exterior al sistema. En este caso, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se escribiría:

$$\sum_{i=1}^{s} m_i V_{i,x} = \sum_{i=1}^{s} m_i u_{i,x}$$
$$\sum_{i=1}^{s} m_i V_{i,y} = \sum_{i=1}^{s} m_i u_{i,y} \qquad [37]$$
$$\sum_{i=1}^{s} m_i V_{i,z} = \sum_{i=1}^{s} m_i u_{i,z}$$

donde V_{ix}, V_{iy}, V_{iz}, son las componentes de la velocidad de la partícula de masa m_i antes de la interacción, y u_{ix}, u_{iy}, u_{iz}, las correspondientes velocidades de la misma partícula después de la interacción. El significado de los otros símbolos resulta claramente de lo expresado.

De lo que precede se deduce que la ley de conservación de la cantidad de movimiento es verificable experimentalmente y resulta un corolario de las leyes generales de la mecánica.

Aplicaciones

a) En algunas estaciones del subterráneo de París hay cintas para transportar horizontalmente a los pasajeros de un andén a otro (Fig. 28). Supongamos que la cinta transportadora se encuentra en estado de régimen estacionario; es decir, que la masa

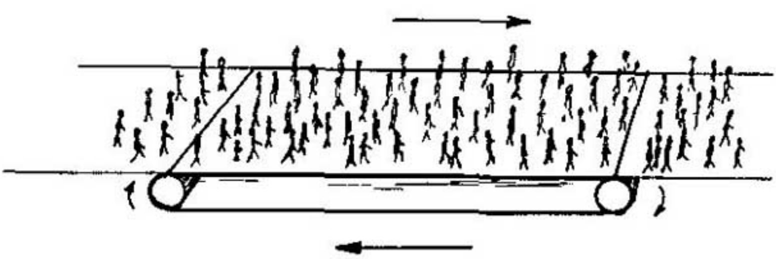


Fig. 28

que transporta y la que entra y sale en la unidad de tiempo no varían. Se desea saber cuál es la fuerza F que el motor debe aplicar a la cinta para que ésta, en las condiciones indicadas, mantenga una velocidad de transporte v constante.

Hemos visto que la fuerza se expresa por [35]:

$$F = \lim \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

Sea m la masa total de pasajeros que transporta la cinta, Δm la masa correspondiente a los pasajeros que se colocan con velocidad inicial nula sobre la cinta transportadora. Si se desprecian las fuerzas de rozamiento, tenemos que la fuerza buscada será:

$$F = v \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

En este ejemplo se ve la conveniencia de expresar la fuerza como la variación de la cantidad de movimiento en la unidad de tiempo. Aquí la velocidad es constante pero cambia la masa que incrementa su velocidad de cero a v.

b) Sea A un cohete en el espacio interestelar sobre el que no actúan fuerzas exteriores (Fig. 29); $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ la cantidad de masa en forma de gas (resultante de la reacción de los combustibles usados en la cámara de combustión, por ejemplo oxígeno e hidrógeno) que se desprende con velocidad $\vec{u}$ con respecto al cohete; $\vec{v}$ la velocidad del cohete en el instante t, con respecto a un sistema inercial de referencia; M la masa total del cohete en el instante t. Aplicando la ley de la conservación de la cantidad de movimiento al caso indicado, obtenemos:

$$M \Delta v = u \Delta M$$

$$M \frac{dv}{dt} = u \frac{dM}{dt}$$

Esta es la ecuación diferencial correspondiente al movimiento del cohete, cuando actúa solamente su motor de propulsión. *

*Quien conozca algo de cálculo infinitesimal hallará fácilmente que la solución de esta ecuación diferencial es $v - v_0 = -u \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$, que nos dice que el incremento de la velocidad del cohete en un intervalo de tiempo Δt depende de la velocidad de escape del gas de combustión con respecto al cohete y del logaritmo neperiano de la relación de la masa total, al principio del intervalo, a la masa del cohete al final de dicho intervalo.

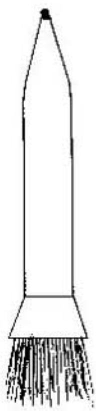


Fig. 29

Problema

A aquellos lectores que conocen los elementos de cálculo infinitesimal, proponemos que demuestren que la ecuación diferencial del cohete, cuando actúa, además de su motor de propulsión, una fuerza exterior F, se expresa:

$$M\frac{dv}{dt} - u\frac{dM}{dt} = F.$$

6.2 Ley de Conservación del Momento de la Cantidad de Movimiento (impulso angular).

Velocidad angular. Si un cuerpo puntiforme de masa m gira alrededor de un eje fijo (Fig. 30) y si una recta, normal al eje, desde un punto del cuerpo considerado (recta BC en la figura) barre un ángulo $\Delta\alpha$ en un tiempo Δt, se define la velocidad angular del cuerpo como el vector $\vec{w}$ cuyo módulo es

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$

y cuya dirección es tal que, visto el movimiento desde el extremo del vector, el cuerpo gira en sentido contrario al de las agujas del reloj. Esta, como todas las definiciones, implica la creación de un concepto. El sentido positivo indicado se fija por convención; se podría haber definido como positivo el sentido inverso y los resultados no cambiarían. Dejamos este punto para que sea probado por el lector. En la estructuración de la ciencia hay cierto margen para las definiciones convencionales. Henri Poincaré[49] clarificó de manera notable el significado y alcance del convencionalismo en ciencia.

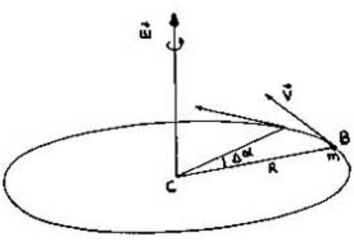


Fig. 30

Volvamos al movimiento circular. En el caso de una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$ sobre una trayectoria circular de radio R

(Fig. 30) tenemos que el módulo de la velocidad tangencial V es igual a ωR, o sea:

$$\omega = \frac{V}{R} \qquad [38]$$

Supongamos ahora que la misma partícula de masa m describe una trayectoria circular también de radio R con velocidad tangencial $\vec{V}$ y que la posición de dicha partícula está determinada por el vector $\vec{r}$ referido a un punto cualquiera del eje de rotación (Fig. 31). En este caso el vector $\vec{r}$ describirá, al girar la partícula, un cono cuyo vértice coincide con el punto 0. Si llamamos θ al ángulo que forma el vector $\vec{r}$ con el eje de giro, el radio de la trayectoria circular de la partícula será

$$R = r \operatorname{sen} \theta$$

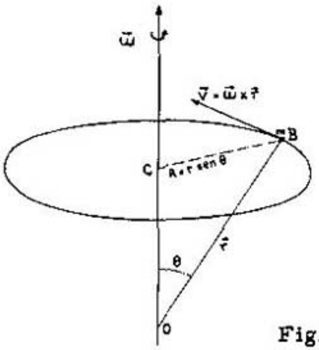


Fig. 31

Ahora bien, en las condiciones especificadas, el vector velocidad tangencial $\vec{V}$ es perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$, como se deduce claramente de la figura 31. Por otra parte, el módulo del vector $\vec{V}$ es $V = R\omega = r\omega \operatorname{sen} \theta$. Para relacionar, por medio de una operación matemática, los vectores ω, r y $\vec{V}$ se ha inventado la definición del producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el que se representa por $\vec{A} \times \vec{B}$ y es igual a un vector $\vec{C}$ perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$; su módulo es igual al producto de los módulos por el seno del ángulo comprendido, y el sentido se fija de manera que, desde el extremo del vector $\vec{C}$, se pase del vector $\vec{A}$ al $\vec{B}$ barriendo el ángulo menor que ambos forman en sentido positivo.

De acuerdo con esta definición y con la relación previamente establecida, podemos escribir:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad [39]$$

Consideremos ahora el movimiento de una partícula de mesa m en un plano con respecto a un punto 0 (Fig. 32).

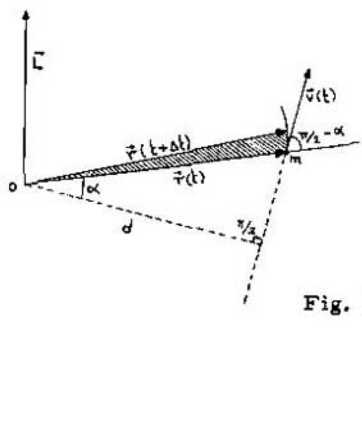


Fig. 32

Sea V la velocidad tangencial en un instante t; $\vec{r}$ el radio vector de la partícula con respecto al punto 0; d la distancia del punto 0 al pie de la perpendicular bajada de 0 sobre la dirección $\vec{V}$. Se define el módulo del vector $\vec{L}$, momento de la cantidad de movimiento, por:

$$L = mV \cdot d \qquad [40]$$

Es fácil inferir que el momento de la cantidad de movimiento debe ser una magnitud vectorial, pues está definido por el módulo y por el plano en que se realiza el movimiento. En la figura 32 está representada la posición de dos radiovectores próximos (correspondientes a los instantes t y $t + \Delta t$). Estos vectores definen un plano en el que se efectúa el movimiento en el intervalo Δt. La superficie rayada en la figura 32 representa el área barrida por el radio vector en el intervalo Δt. La manera de reunir las dos características indicadas del momento de la cantidad de movimiento consiste en representarlo por un vector que tenga, en cada instante, la dirección de la normal al plano del movimiento, el módulo o el valor absoluto definido por la ecuación [40] y el sentido, de manera que desde su extremo se vea mover a la partícula en el sentido contrario al de las agujas de un reloj. Por lo que hemos visto anteriormente, se define el sentido positivo del vector $\vec{L}$ de igual manera que el sentido positivo del vector rotación. Recordando la definición dada del producto vectorial de dos vectores y la definición del vector $\vec{L}$, podemos escribir (Fig. 32):

$$\vec{L} = m\vec{r}(t) \times \vec{V}(t) \qquad [41]$$

Teniendo presente la ecuación [39], vemos que esta relación se convierte en

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad [42]$$

Si en la partícula considerada actúa una fuerza exterior $\vec{F}$ (Fig. 33),

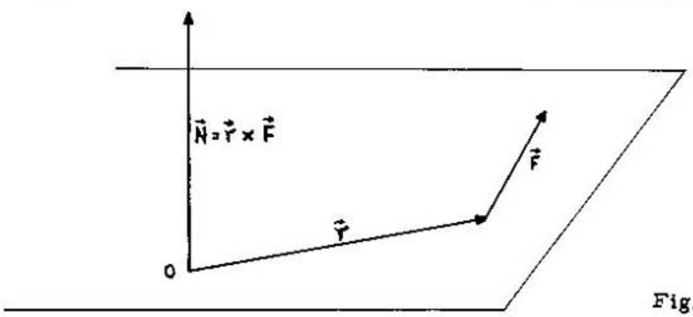


Fig. 33

el momento de esta fuerza con respecto al punto 0, recordando lo expuesto en la página 38, se expresa por:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad [43]$$

Es fácil ver que,* derivando [39], se tiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{V}(t)}{dt} + m\vec{V}(t) \times \vec{V}(t) \qquad [44]$$

El segundo término del miembro de la derecha es nulo, como surge de inmediato de la definición del producto vectorial de dos vectores; por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = m\vec{r} \times \vec{a}(t) \qquad [45]$$

En consecuencia, vemos que la derivada del vector $\vec{L}$ con respecto al tiempo es igual al momento de las fuerzas inerciales, y por la segunda ley de Newton podemos escribir:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad [46]$$

Por lo tanto, cuando las fuerzas exteriores son nulas o pasan por el punto con respecto al cual tomamos los momentos, tenemos que:

$$\vec{L} = \text{constante} \qquad [47]$$

De [45] y [47] deducimos que, cuando el momento de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo, la aceleración de la partícula debe ser un vector cuya dirección pasa por el punto 0, con respecto al cual tomamos los momentos.

De [41] y [47] se deduce de inmediato (los detalles de la demostración los dejamos al lector) que cuando actúan sobre una partícula fuerzas que concurren en un punto, el radio vector de la partícula con respecto a dicho punto barre áreas iguales en tiempos iguales, Como ejercicio, dejamos al lector demostrar que la segunda ley de Kepler es un simple corolario de [47].

El momento de la cantidad de movimiento, o sea el vector $\vec{L}$, es constante cuando las fuerzas exteriores aplicadas a una partícula

---

* Los lectores que no conozcan cálculo infinitesimal pueden saltar esta demostración, leer el resultado final y pasar a la sección siguiente.

son nulas o pasan por el punto con respecto al cual se determina el momento de la cantidad de movimiento. Esto es, precisamente, la ley de conservación del momento angular o del momento de la cantidad de movimiento. Por lo expuesto se ve que es un corolario de las leyes generales de Newton y de las definiciones operacionales dadas.

Esta ley de conservación tiene múltiples aplicaciones. Cuando un nadador toma impulso en el trampolín para dar un salto ornamental, inclina su cabeza hacia adelante, por ejemplo, imprimiéndole a su cuerpo una rotación lenta; luego recoge las piernas y brazos hacia su cuerpo encorvado y, consecuentemente, gira más rápido; cuando está cerca del agua estira su cuerpo y, por lo tanto, la rotación se reduce en grado considerable.

Pongamos otro ejemplo. Supongamos: a) que en un motor (de un ventilador, por ejemplo) colocamos dos varillas rígidamente adheridas a su eje y perpendiculares al mismo (Fig. 34); b) que en ellas colocamos las masas A y B, las que pueden moverse a lo largo de las varillas; c) que mediante un cordón se las puede acercar al eje o permitir que se alejen del mismo. Si se imprime al motor un movimiento de rotación rápido y luego se detiene y se sueltan las dos masas, ¿qué se observará?; ¿por qué?; ¿qué sucederá si se repite el mismo experimento llevando las masas hacia el centro cuando el sistema está en movimiento? Un experimento análogo puede realizarse con facilidad si nos sentamos en el taburete de un piano teniendo sendas masas en las manos; si se imprime un movimiento de rotación cuando se tienen los brazos recogidos y luego se extienden ¿qué acontecerá?

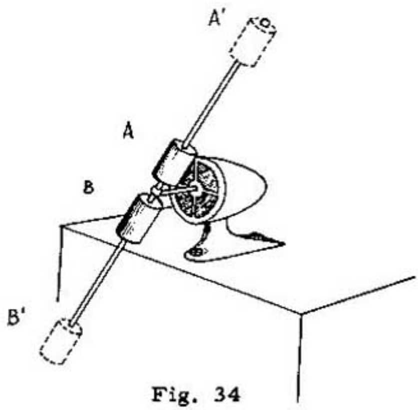


Fig. 34

6.3 Ley de Conservación de la Energía Mecánica

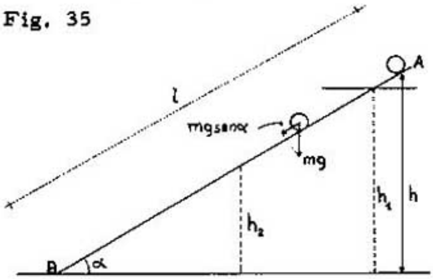
Comencemos por un caso simple. Si dejamos caer una esferita sobre un plano que está inclinado un ángulo α con respecto al plano horizontal (Fig. 35), al recorrer la longitud l del plano inclinado, teniendo en cuenta la fórmula [13], tendremos la relación:

$$l = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cdot t^2 \qquad [48]$$

o sea:

$$2gh = g^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot t^2 \qquad [49]$$

Fig. 35



Como g sen $\alpha = a$, aceleración de caída sobre el plano inclinado, podemos escribir, teniendo en cuenta [14], con $V_0 = 0$;

$$V = \sqrt{2gh} \qquad [50]$$

Vemos, pues, que la velocidad con que la esferita llega al punto B, partiendo con velocidad nula del punto A, es independiente de la inclinación del plano y depende solamente de la altura h, con respecto al plano horizontal, desde la que se deja caer la esferita.

De [50] podemos escribir:

$$\frac{1}{2} m V^2 = mgh \qquad [51]$$

Como $m \cdot g$ es igual a la fuerza que la gravedad ejerce sobre la masa m, o sea el peso, y recordando la definición de trabajo dada en [13], vemos que el segundo miembro de [51] es igual al trabajo efectuado por el peso al recorrer una distancia de caída h. Si tomamos dos alturas h_1 y h_2 y las correspondientes velocidades de acuerdo con [51], podemos escribir:

$$\frac{1}{2} m V_2^2 = mg(h - h_2); \qquad \frac{1}{2} m V_1^2 = mg(h - h_1) \qquad [52]$$

o sea:

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = mgh_1 - mgh_2 \qquad [53]$$

Es decir, que:

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} m V_2^2 + mgh_2 = \text{constante} \qquad [54]$$

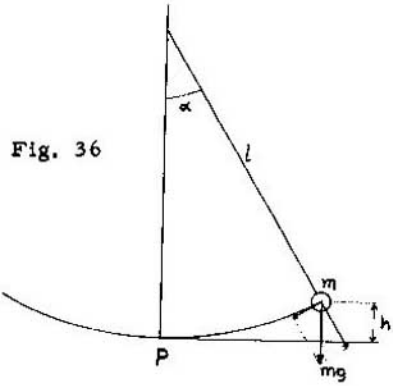
Al producto $m \cdot g \cdot h$ se le llama energía potencial con respecto al plano horizontal considerado, y el producto $\frac{1}{2} m V^2$, energía cinética.

Con estas definiciones tenemos que la ecuación [54] expresa que en el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de la gravedad, la suma de la energía cinética y de la energía potencial se mantiene constante.

Aplicaciones

En la figura 36 se representa el cuerpo de masa m de un péndulo apartado un ángulo α de su posición de equilibrio. Se desea saber cuál es la máxima velocidad que puede adquirir dicha masa al dejarla en libertad. Si medimos la energía potencial de la masa del péndulo con respecto a un plano horizontal que pasa por P (el punto más bajo de su trayectoria), aplicando la ecuación [54], tenemos:

Fig. 36

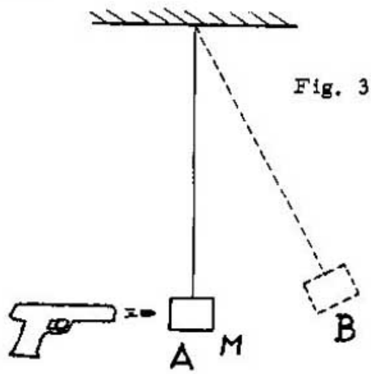


$$V = \sqrt{2gh}$$

Ejercicio: ¿cómo se puede determinar la velocidad de salida de una bala de revólver conociendo su masa y usando un péndulo balístico (Fig. 37), es decir, disparando contra la masa M de un péndulo? Se supone que el choque es inelástico, o sea que la bala queda incrustada en la masa M.

6.4 Demostración de la Ley

Fig. 37



Pasaremos ahora a dar una demostración más general de la ley de conservación de la energía mecánica para los lectores que conocen un poco de cálculo matemático.

Hemos definido en [5] el trabajo de una fuerza. Haremos ahora una generalización. Supongamos que una fuerza $\vec{F}$, que sea función de las coordenadas de cada punto, actúa sobre una masa m, en un desplazamiento $d\vec{r}$. El trabajo de dicha fuerza es igual al producto escalar de los vectores $\vec{F}$ y $d\vec{r}$; es decir, teniendo en cuenta que $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt}$:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

como $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, tenemos:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m d\vec{V}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{V}\cdot d\vec{V} = \frac{1}{2}d(mV^2) \qquad [55]*$$

Si suponemos que sobre una partícula de masa m actúa la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de una determinada curva (Fig. 38), tenemos que la suma de todos los trabajos elementales, al pasar el cuerpo de la posición A a la B y al hacerse cada vez más pequeños los recorridos elementales $\Delta\vec{r}$:

$$\sum_A^B \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \to \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_A^B d(m\vec{V}^2) = \frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2) \qquad [56]$$

Por la definición de energía cinética dada previamente se concluye que el incremento de energía cinética es igual, cuando las pérdidas por rozamiento se consideran nulas, al trabajo efectuado sobre el cuerpo. Se ve fácilmente que la conclusión recíproca también es cierta. Cuando actúa sobre el cuerpo una fuerza que se opone al movimiento del mismo, la pérdida de energía cinética es igual al trabajo realizado por el cuerpo contra la referida fuerza.

Supongamos que se pueda definir una función $U(x, y, z)$, que dependa exclusivamente de la posición, de manera tal que las componentes de la fuerza con respecto a los ejes x, y, z sean:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad [57]$$
$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

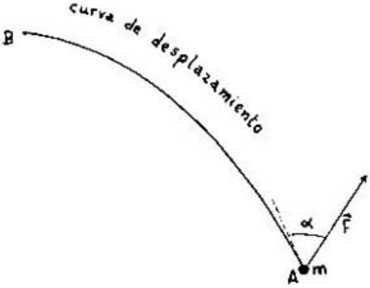


Fig. 38

* $\Delta\frac{1}{2}(m\vec{V}^2) = \frac{1}{2}[m(\vec{V}+\Delta\vec{V})^2 - m\vec{V}^2] = m\vec{V}\cdot\Delta\vec{V} + \frac{1}{2}m(\Delta\vec{V})^2$. Si hacemos $\Delta\vec{V}$ tender a cero, podemos despreciar el segundo término con respecto al primero. Por lo tanto, tenemos que

$$d(\tfrac{1}{2}m\vec{V}^2) = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Cuando se cumplen las relaciones [57] se dice que el sistema es conservativo. En este caso la igualdad [56] nos permite escribir:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \right) = - \int_A^B dU = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2$$

o sea:

$$U_B + \frac{1}{2}mV_B^2 = U_A + \frac{1}{2}mV_A^2 = \text{constante} \qquad [58]$$

Llamando U a la energía potencial, tenemos el siguiente teorema: cuando un cuerpo se mueve en un campo de fuerzas conservativas, la energía total es constante.

De lo expuesto vemos que a medida que una rama de la física se va estructurando tiende a enriquecerse con nuevos conceptos, cuya expresión requiere a su vez un lenguaje matemático adecuado. Muchas veces las deficiencias del lenguaje matemático condujeron a la creación de nuevos e importantes capítulos de la matemática. Newton creó el cálculo infinitesimal precisamente para poder aplicar las leyes de la mecánica al movimiento de los astros. Ejemplos similares hay muchos.

6.5 Aplicación de las Leyes de Conservación al Choque de Dos Cuerpos

Consideremos primeramente el choque elástico central de dos cuerpos esféricos de masas m_1 y m_2, que se mueven sobre una recta con velocidades V_1 y V_2, respecto a una terna fija a la Tierra (Fig. 39). Convendremos decir que la velocidad es positi-

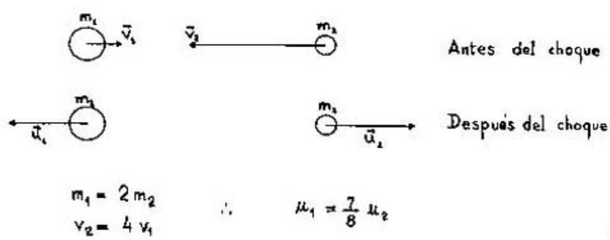


Fig. 39

va cuando el cuerpo se mueve hacia la derecha. Designemos por V_1 y V_2 las velocidades de los cuerpos antes del choque y por u_1 y u_2 las correspondientes velocidades después del choque. En el choque de cuerpos elásticos, la energía cinética de tales cuerpos es constante; es decir, tiene el mismo valor antes y después del choque. Por lo tanto podemos escribir:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \qquad [59]$$

Por otra parte, basándonos en la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, tenemos:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad [60]$$

Podemos escribir esta ecuación:

$$m_1(V_1 - u_1) = m_2(u_2 - V_2) \qquad [61]$$

Análogamente, la ecuación [59] se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_1(V_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - V_2^2) \qquad [62]$$

o sea:

$$m_1(V_1 + u_1)(V_1 - u_1) = m_2(u_2 + V_2)(u_2 - V_2) \qquad [63]$$

Dividiendo esta ecuación por la [61] obtenemos:

$$\begin{aligned} V_1 + u_1 &= u_2 + V_2 \\ V_1 - V_2 &= u_2 - u_1 \end{aligned} \qquad [64]$$

Es decir, que en un choque elástico central a lo largo de una recta, la velocidad relativa con que se acercan las esferas antes del choque, es igual a la velocidad con que se apartan después de éste.

Con el fin de determinar las velocidades u_1 y u_2 después del choque, se despeja u_2, por ejemplo, de la ecuación [64], es decir:

$$u_2 = V_1 + u_1 - V_2$$

Si reemplazamos este valor de u_2 en la ecuación [63], se obtiene:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}V_2 \qquad [65]$$

Similarmente se deduce:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}V_2 \qquad [66]$$

Si las masas de los cuerpos son iguales ($m_1 = m_2$), tenemos:

$$u_1 = V_2; \quad u_2 = V_1$$

Supongamos un choque inelástico en que el cuerpo que choca con el otro queda unido a éste; aplicando la ley de conservación de la cantidad de movimiento, tendremos, llamando V a la velocidad de los dos cuerpos unidos después del choque:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} \qquad [67]$$

Como ejercicio, se sugiere en este caso explicar: a) que la energía cinética después del choque es menor que antes del mismo; b) ¿cuál es la fórmula que da la diferencia de energía cinética antes y después del choque?; c) ¿qué pasa con tal diferencia de energía?

Problemas

1) Una bala de 10 g se dispara contra un péndulo balístico (Fig. 37) cuya masa $m = 3$ kg. Si el centro de gravedad de esta masa se eleva a 10 cm, calcular la velocidad de salida de la bala, suponiendo que el choque es inelástico.

2) Un camión de 10 toneladas que marcha a una velocidad de 40 km/h, choca con otro de 5 toneladas que se mueve en la misma dirección a la velocidad de 2 km/h. Calcular cuáles serán las velocidades después que el primero choca con el segundo, en la hipótesis de que el choque sea inelástico y luego en la suposición de que sea elástico. Por cierto, el choque real es semielástico.

3) Una partícula de masa m_1 choca a otra de masa m_2 que se encuentra en reposo. Si suponemos que el choque es centrado y elástico, cuál es la fracción de energía cinética de la primer partícula que es transferida a la segunda en función de $\frac{m_1}{m_2}$.

7. PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECANICA

Hemos visto, en sus rasgos más notables, el desarrollo y estructuración de la teoría de los fenómenos mecánicos. Con los conceptos y leyes expuestos hasta ahora, no es posible dar un procedimiento general que solucione los diferentes problemas de mecánica que se puedan presentar. El desiderátum de toda ciencia es alcanzar un número reducido de principios generales, a partir de los cuales se puedan deducir todas las leyes particulares.

7.1 Principio de d'Alembert

En la historia de la mecánica es un jalón importantísimo el marcado por el "Traité de Dynamique" (1743), de Jean d'Alembert (1717-1783), donde generaliza el principio de las velocidades virtuales de Jean Bernoulli (1667-1748). Explicaremos en qué consiste el principio de d'Alembert.[30,61,62]

Consideremos un sistema de partículas. Sobre cada una de ellas pueden actuar dos clases de fuerzas: a) las que son externas al sistema; b) las que son originadas por las interacciones recíprocas entre las partículas del sistema. Designemos a la resultante de las fuerzas externas actuantes en la partícula i por $\vec{F}_i^{(e)}$ y a la resultante de las fuerzas internas que actúan en la misma partícula por $\vec{R}_i$. Llamando m_i a la masa de la partícula indicada, de acuerdo con la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{R}_i = m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \qquad [68]$$

siendo $\vec{V}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$; $p_i = m_i \vec{V}_i$; $i = 1, 2, 3, \ldots N$; $\vec{r}_i$ el radio vector de la partícula i, y $\vec{F}_i$ la resultante de las fuerzas actuantes en la partícula i (las fuerzas externas al sistema más las de origen interno al sistema o de vínculo).

D'Alembert concibió que, escribiendo la ecuación [68] de la siguiente manera:

$$\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0 \qquad [69]$$

es posible concluir que la resultante de las fuerzas reales que actúan sobre la partícula i menos la fuerza de inercia $\frac{d\vec{p}_i}{dt}$, es igual a cero; vale decir, que la partícula i estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores y de vínculo que se aplican a la misma, más una fuerza igual a $-\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}$.

En la sección 9 del capítulo cuarto hemos expuesto el principio de los trabajos virtuales, aplicado a un sistema de partículas en equilibrio. Habíamos visto que cuando la fuerza total que actúa sobre cada partícula es nula ($\vec{F}_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, N$), si se produce en cada una de ellas desplazamientos virtuales arbitrariamente pequeños Δr_i (es decir, desplazamientos compatibles con las fuerzas y vínculos que correspondan al sistema considerado) se tiene que el producto escalar $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = 0$, o sea que el trabajo virtual de $\vec{F}_i$ en el desplazamiento $\Delta\vec{r}_i$ es nulo. La suma de todos los trabajos virtuales correspondientes a todas las partículas del sistema dado debe ser obviamente también nula, o sea:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = 0 \qquad [70]$$

Esta es la expresión del principio de los trabajos virtuales que, como hemos explicado en la sección 9 del capítulo cuarto, sintetiza toda la estática.

Mediante el artificio indicado en la ecuación [69] vemos ahora que a un sistema dinámico de partículas podemos aplicarle el principio de los trabajos virtuales; es decir, que en vez de la ecuación [70] para el caso de un sistema de partículas en movimiento bajo la acción de fuerzas externas e internas, tendríamos:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \Delta \vec{r}_i = 0 \qquad [71]$$

Teniendo en cuenta las relaciones [68] podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(e)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \Delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = 0 \qquad [72]$$

Para fuerzas centrales de interacción entre las partículas del sistema y en virtud de la tercera ley de Newton, la segunda sumatoria de [72] es nula, pudiendo, por lo tanto, escribirse:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(e)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \Delta \vec{r}_i = 0 \qquad [73]$$

Esta relación expresa el principio de d'Alembert. Como hemos indicado, mediante dicho principio, se reduce la dinámica a la estática.

La ecuación [73], en coordenadas cartesianas, se escribe:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_{ix}^{(e)} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \Delta x_i + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_{iy}^{(e)} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \Delta y_i + \qquad [74] \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_{iz}^{(e)} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \Delta z_i = 0 \end{aligned}$$

siendo Δx_i, Δy_i, Δz_i las componentes del desplazamiento virtual $\Delta \vec{r}_i$. Si el sistema considerado estuviera constituido por N partículas libres, sin ninguna relación de vínculo entre sí, los desplazamientos virtuales $\Delta \vec{r}_i$ serían todos independientes y, por lo tanto, para que [74] se cumpla, es necesario que cada uno de los paréntesis sea nulo. En este caso tendríamos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
F_{ix} - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= 0 \\
F_{iy} - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N \qquad [75] \\
F_{iz} - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= 0
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones las hubiéramos podido escribir directamente basándonos en la segunda ley de Newton. En general, cuando existen relaciones de vínculo entre las partículas del sistema considerado, los desplazamientos virtuales $\Delta \vec{r}_i$ no son todos ellos independientes y, por consecuencia, los paréntesis que aparecen en [73] o en [74] no resultan útiles. Es necesario efectuar una transformación de coordenadas para hacer el principio de d'Alembert aplicable a los sistemas con relaciones de vínculo.

7.2 Relaciones de Vínculo y Grados de Libertad

Los grados de libertad de un sistema de partículas indican el número de coordenadas independientes que son necesarias para definir por completo la posición del sistema considerado. Así, por ejemplo, una partícula libre tiene tres grados de libertad (las tres coordenadas, con respecto a un sistema de referencia, necesarias para definir por completo su posición). Entre las N partículas integrantes de un cuerpo sólido existen las siguientes condiciones de vínculo: $\vec{r}_{ij}^{\,2} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = a_{ij} =$ constante (por definición, la distancia entre dos puntos de un cuerpo rígido es constante). Es fácil ver que en este caso hay seis grados de libertad (tres fijan la posición del centro de gravedad del sólido y tres definen su posición con respecto a una terna referencial). Para una partícula que está obligada a moverse sobre una superficie esférica de radio r_0, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - r_0^2 = 0$$

por lo tanto tiene sólo dos grados de libertad (las dos coordenadas necesarias para fijar la posición de un punto sobre una superficie esférica). En general, las condiciones de vínculo pueden expresarse por medio de relaciones funcionales entre las coordenadas de las partículas integrantes del sistema

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0; \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, s$$

En cada una de estas relaciones no aparecen necesariamente todas las coordenadas de todas las partículas; s es igual al número de vínculos, y $3n - s$ representa el número de grados de libertad del sistema. Cuando los vínculos pueden expresarse por ecuaciones como las indicadas se dice que el sistema es holónomo. Las relaciones de vínculo $f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n, t)$ pueden contener a la variable tiempo (caso de vínculo variable con el tiempo); cuando son independientes del tiempo, el sistema se llama esclerónomo. Cuando no es posible expresar los vínculos por ecuaciones como las indicadas, entre las coordenadas y el tiempo, se dice que el sistema es no-holónomo.

7.3 Coordenadas Generalizadas

Nos limitaremos al caso de sistemas holónomos.

En muchos problemas de dinámica en los que existen relaciones de vínculo es conveniente introducir un conjunto de nuevas variables, que sean independientes entre sí y suficientes para definir cualquier configuración posible del sistema tratado. El número de estas variables independientes entre sí es igual al de grados de libertad. A ese conjunto de variables independientes se les llama coordenadas generalizadas.

Consideremos un ejemplo para fijar las ideas. Supongamos que un punto material está obligado a moverse sobre una superficie esférica. Si llamamos q_1 y q_2 a los ángulos que fijan la posición del punto P sobre una superficie esférica de radio r_0, podemos escribir las siguientes relaciones (Fig. 40) entre las coordenadas cartesianas y las generalizadas q_1 y q_2:

$$x = r_0 \operatorname{sen} q_1 \cdot \cos q_2$$

$$y = r_0 \operatorname{sen} q_1 \cdot \operatorname{sen} q_2$$

$$z = r_0 \cos q_1$$

En general, si se trata de un sistema de N partículas con s relaciones de vínculo $f_j(x_1, \ldots, z_n) = 0$ $j = 1, 2, 3, \ldots, s$, tendremos $3n - s = q$ variables independientes que designaremos por $q_1, q_2, \ldots q_t$

y podemos determinar las coordenadas cartesianas en función de las generalizadas, es decir:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_s) \\
y_1 &= y_1(q_1, q_2, \dots, q_s) \\
z_1 &= z_1(q_1, q_2, \dots, q_s) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_n &= z_n(q_1, q_2, \dots, q_s)
\end{aligned}
\qquad [76]
$$

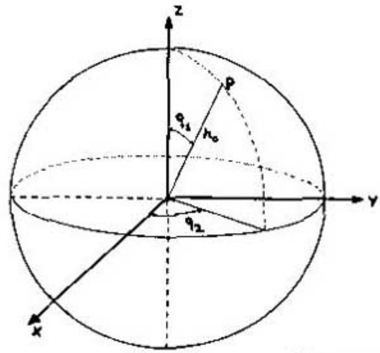


Fig. 40

7.4 Ecuaciones de Lagrange

Con el propósito de extraer relaciones útiles de la ecuación [74], debemos expresarla en función de un conjunto de coordenadas generalizadas.* Para eso tomamos incrementos virtuales y derivamos con respecto al tiempo las relaciones [76], o sea:

$$
\begin{aligned}
\Delta x_i &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\Delta q_j; & \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \\
\Delta y_i &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\Delta q_j; & \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \\
\Delta z_i &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\Delta q_j; & \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j
\end{aligned}
\qquad [77]
$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$; $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$; $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$; etc.

Las relaciones [77] se sintetizan con notación vectorial en las siguientes:

$$
\Delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\Delta q_j; \qquad \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad [78]
$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

---

* Los lectores que no conozcan cálculo infinitesimal deben saltear esta parte y la siguiente.

La parte correspondientes al trabajo virtual [73] se expresa, utilizando la primera de las ecuaciones [78]:

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\Delta q_j = \sum_{j=1}^{S} Q_j \Delta q_j \quad [79]$$

donde:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_{i,x}^{(e)} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \vec{F}_{i,y}^{(e)} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \vec{F}_{i,z}^{(e)} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) \quad [80]$$

se llama la componente j de la fuerza generalizada.

Pasemos ahora a considerar la suma restante de [73] (recordando que $\vec{p}_i = m\vec{V}_i$ y $\dot{\vec{p}} = m_i\dot{\vec{V}}_i = m_i\frac{d^2 r_i}{dt^2}$) y utilizando [78], tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m\ddot{\vec{r}}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\Delta q_j \quad [81]$$

siendo $\ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$

Es fácil ver que en la ecuación [81] se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\right] \quad [82]$$

En base de la segunda de las ecuaciones [78], tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{S} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \quad [83]$$

Derivando la segunda ecuación [78] se obtiene:

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad [84]$$

Usando las ecuaciones [83] y [84], la [82] se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} \quad [85]$$

Donde $E_c = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{V}_i^{\,2}$ es la energía cinética del sistema.

Teniendo en cuenta [73], [79], [81] y [85] obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} - Q_j\right]\Delta q_j = 0 \quad [86]$$

Para los sistemas holónomos que hemos tratado, los Δq_j son todos independientes; por consiguiente, para que se cumpla [86] es necesario que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s) \quad [87]$$

104 Estas son las ecuaciones de Joseph-Louis Lagrange (1730-1813).[16,30,61,62] En su tratado *"Mécanique Analytique"*, Lagrange se propuso estructurar la mecánica de manera que todo problema de esta rama de la física pudiera ser elucidado sin necesidad de diagramas y artificios, mediante el empleo de ecuaciones generales. De esta manera la solución de todo problema mecánico se redujo a un problema matemático.

Mediante las ecuaciones diferenciales que llevan su nombre, [87], Lagrange consiguió perfeccionar y completar la teoría de la mecánica. Con dichas ecuaciones es posible deducir las fórmulas necesarias para la solución de diversos casos particulares.

Supongamos que las fuerzas exteriores aplicadas a las partículas del sistema sean conservativas, es decir, que se pueden derivar de la energía potencial U; o que se pueda escribir:

$$F_{i,x}^{(e)} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad F_{i,y}^{(e)} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad F_{i,z}^{(e)} = -\frac{\partial U}{\partial z_i} \quad [88]$$

Reemplazando estas expresiones en [82] resulta:

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad [89]$$

De [87] y [89] se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (E_c - U)}{\partial q_j} = 0 \qquad [90]$$

Si la energía potencial es función exclusiva de las coordenadas de posición; es decir, si $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$, [90] puede escribirse:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(E_c - U) - \frac{\partial}{\partial q_j}(E_c - U) = 0 \qquad [91]$$

Definiendo la función de Lagrange, L, como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, las ecuaciones de Lagrange toman la siguiente forma, para sistemas holónomos y conservativos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s) \qquad [92]$$

donde: $L = E_c - U$.

7.5 Aplicaciones de las Ecuaciones de Lagrange

Consideremos el siguiente sistema constituido por una polea fija A (Fig. 41) y otra móvil B. Un cordón de longitud l_1 que pasa por la polea móvil une los cuerpos $C_1 = 2\,m$ y $C_2 = m$. Sea la masa de la polea móvil igual a m. La polea móvil B está unida por un cordón de longitud l_2, que pasa por la polea fija, a un cuerpo $C_3 = 4\,m$. Sean, además, despreciables las masas de los cordones y el momento de inercia de la polea móvil. Definimos, en este caso, las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 de la siguiente forma: q_1 como la distancia vertical entre C_1 y el centro de B, y q_2 como la distancia vertical entre C_3 y el centro de A.

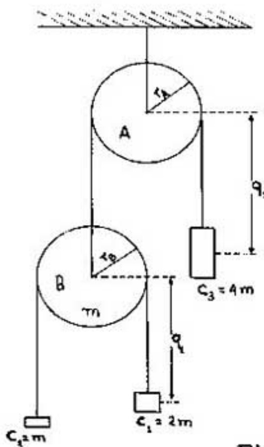


Fig. 41

De estos datos se tiene que la polea móvil B se encuentra a una distancia $l_2 - q_2 - \pi r_A$, debajo del eje de la polea fija A, y el cuerpo C_2 se halla a una distancia $l_1 - q_1 - \pi r_B$ debajo del eje de la polea móvil, siendo r_A y r_B los radios de las poleas A y B, respectivamente.

La energía cinética del sistema considerado en función de las velocidades generalizadas $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ se expresa:

$$E_c = \frac{1}{2}(4m)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}(2m)(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

La energía potencial con respecto a un plano horizontal que pase por el centro de la polea A es:

$$U = -4mgq_2 - mg(l_2 - q_2 - \pi r_A) - 2mg(l_2 - q_2 - \pi r_A + q_1) -$$
$$- mg(l_2 - q_2 - \pi r_A + l_1 - q_1 - \pi r_B)$$

Recordando que $L = E_c - U$, se deduce que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 8m\dot{q}_2 - m\dot{q}_1; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 3m\dot{q}_1 - m\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 8m\ddot{q}_2 - m\ddot{q}_1; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 3m\ddot{q}_1 - m\ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = mg$$

Colocando estos resultados en las ecuaciones de Lagrange [92] obtenemos:

$$8m\ddot{q}_2 - m\ddot{q}_1 = 0 \quad \text{o sea} \quad \ddot{q}_2 = 8\ddot{q}_2$$
$$3m\ddot{q}_1 - m\ddot{q}_2 - mg = 0 \quad \text{o sea} \quad 3\ddot{q} - \ddot{q}_2 = g$$

de las que fácilmente se deduce:

$$\ddot{q}_1 = \frac{8}{23}g; \qquad \ddot{q}_2 = \frac{1}{23}g.$$

Para poder determinar los desplazamientos de las distintas masas es necesario integrar estas simples ecuaciones y definir las posiciones y velocidades iniciales de los distintos cuerpos móviles.

7.6 Ecuaciones Canónicas de Hamilton

Recordando que la función de Lagrange es $L = E_c - U$, se define el impulso (o cantidad de movimiento) generalizado p_i como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, s) \qquad [93]$$

Para el caso de una partícula libre que se mueve en un campo, función de las coordenadas de posición, se tiene:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - U(q_1, q_2, q_3)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = m\dot{q}_i$$

es decir, que en el caso de coordenadas cartesianas, el impulso generalizado [93] coincide con la cantidad de movimiento introducida anteriormente. Es fácil demostrar que teniendo en cuenta [93] y la definición de energía cinética, se cumple que:

$$2\,E_c = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \qquad [94]$$

William Rowan Hamilton (1805-1865) definió la siguiente función de los p_i y los q_i que lleva su nombre:

$$H(p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s) \qquad [95]$$

Como los $\dot{q}_j$ son funciones de los q_i y los p_i, podemos escribir:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \qquad [96]$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} \qquad [97]$$

Usando la ecuación [93] y las ecuaciones de Lagrange [92], obtenemos:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, s) \qquad [98]$$

Estas son las llamadas ecuaciones canónicas de Hamilton.(15,30,60,63)

Cuando la energía total del sistema es constante, de la definición de la función de Lagrange ($L = E_c - U$) y de las ecuaciones [94] y [95] tenemos:

$$H = 2E_c - E_c + U = E_c + U = \text{Energía total} \qquad [99]$$

Hemos visto que las ecuaciones diferenciales de Lagrange [92] son de segundo orden, en tanto que las de Hamilton son de primer orden. Hay tantas ecuaciones de Lagrange como grados de libertad tiene el sistema considerado, mientras que el número de ecuaciones de Hamilton es igual al doble del número de grados de libertad.

Las ecuaciones de Hamilton son básicas para el desarrollo de la mecánica estadística y para la mecánica cuántica. Por esto hemos deseado llegar a ellas pasando por alto múltiples desarrollos secundarios.

7.7 Aplicaciones de las Ecuaciones de Hamilton

Consideremos el movimiento de un planeta de masa m. La energía cinética en coordenadas polares (r, θ) se expresa:

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad [100]$$

donde $\dot{\vec{r}}$ es la velocidad en la dirección del radio vector $\vec{r}$ y $\dot{\theta}$ la velocidad angular del mismo. Como $\vec{r}$ y θ son independientes, podemos tomar $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. Teniendo en cuenta la ecuación [93] obtenemos:

$$p_1 = p_r = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{r}; \quad p_2 = p_\theta = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2} = mr^2\dot{\theta} \quad [101]$$

Reemplazando estos valores en [100] y sumando la energía potencial U, tenemos:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{GmM}{r} \qquad [102]$$

siendo M la masa del Sol.

Las ecuaciones de Hamilton nos permiten escribir:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2}; & \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_\theta &= 0; & \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \end{aligned} \qquad [103]$$

Reemplazando en la primera de las ecuaciones [103] $\dot{p}_r$ y $\dot{p}_\theta$ por su equivalente en función de las velocidades, ecuación [101], se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\dot{\theta}^2 - \frac{GmM}{r^2} \qquad [104]$$

Esta ecuación indica que la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento en la dirección radial es igual a la diferencia entre la fuerza centrífuga y la fuerza gravitatoria de atracción. Es fácil ver que la ecuación $\dot{p}_\theta = 0$ expresa la ley de las áreas de Kepler.

7.8 Principio de Hamilton

Hemos mencionado en páginas anteriores que es aspiración de la física teórica llegar a la expresión de principios variacionales, de los que se puedan derivar las leyes que correspondan al considerado campo de la física.

Previamente hemos obtenido las ecuaciones de Lagrange (7.4) partiendo de un estado inicial del sistema considerado en un instante dado y efectuando pequeños desplazamientos virtuales en dicho estado inicial; es decir, basándonos en un principio diferencial (Principio de d'Alembert). Las ecuaciones de Lagrange también pueden obtenerse partiendo de un principio integral. Indicaremos en líneas generales en qué consiste tal principio, que se llama Principio de Hamilton.[21,30,36,38]

Como hemos visto, la configuración instantánea de un sistema de partículas está determinada por los valores de las distintas variables generalizadas del sistema en dicho instante $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_l)$. Por lo tanto, si el sistema tiene l grados de libertad, la configuración, en cada instante, estará definida en un espacio de l dimensiones (espacio de configuración). Es fácil ver que el espacio de configuración así definido es en general diferente del espacio tridimensional en que se mueve el sistema. Por lo tanto, un sistema en el instante t_0 ocupará, por ejemplo, el punto A en el espacio de configuración (Fig. 42), y en el instante t_1, el punto B. ¿Cuál será la trayectoria que el punto representativo del sistema en el espacio de configuración seguirá, en este espacio, al pasar del punto A al B? La trayectoria en el espacio de configuración que corresponde al movimiento real del sistema conservativo es aquélla a lo largo de la cual (por ejemplo, línea llena en la Fig. 42) la integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (E_c - U)\,dt \qquad [105]$$

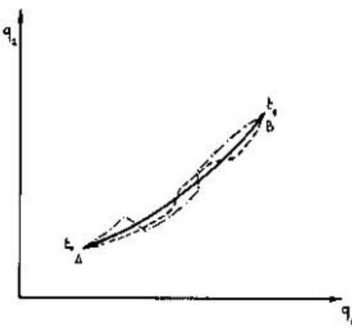


Fig. 42

adquiere un valor extremo (máximo o mínimo). L es la función de Lagrange que ya fue definida. Indicaremos más claramente el significado del indicado valor extremo. Supongamos que se efectúa la mencionada integral a lo largo de muchos caminos diferentes en el espacio de configuración (por ejemplo, líneas punteadas en la Fig. 42). Ahora bien, la diferencia entre el valor de dicha integral a lo largo de la trayectoria que corresponde al movimiento real y el valor de la misma integral a lo largo de caminos muy próximos al real (que difieran de él en infinitésimos de primer orden), en el espacio de configuración, será nula; es decir:

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_0} L dt = 0 \qquad [106]$$

Aplicando los procedimientos del cálculo de variaciones, se encuentra que de [106] surgen las ecuaciones de Lagrange. En consecuencia, el principio de Hamilton constituye la forma más sintética de expresar las leyes de la dinámica de un punto material o de un sistema conservativo de un número finito de puntos materiales. Por lo tanto, se puede partir del principio de Hamilton como postulado fundamental de la mecánica, en vez de las leyes de Newton.

Existen importantes problemas de mecánica inherentes a los medios continuos, como, por ejemplo, las vibraciones de una membrana. Un sistema continuo está constituido por un número infinito de puntos materiales. Los métodos de Lagrange y de Hamilton, que hemos indicado, se generalizan para el caso de los medios continuos definiendo de manera apropiada la correspondiente función de Lagrange.(30,38) El propósito de esta monografía no es el desarrollar un texto de mecánica, sino tomar algunos casos relacionados con la esfera de la física para poner de manifiesto la interconexión de los experimentos y la teoría en su evolución.

6

ALGUNOS CASOS DE FISICA PROBABILISTA

Los conceptos de probabilidad y estadística son de extraordinaria importancia para la física moderna.[7,14,40,59] Además, toda ciencia experimental debe apoyarse en la teoría de las observaciones y las mediciones, la que, a su vez, se basa en la teoría de la probabilidad y en la estadística matemática. En el proceso de unificación de la ciencia, difícilmente hay un concepto más importante que el de probabilidad. Mediante él, se relacionan campos científicos al parecer desvinculados por completo. Gracias a los principios de estadística se relacionan la mecánica con la termodinámica, de manera que ésta es una consecuencia de la mecánica aplicada a un conjunto de muchas partículas con el auxilio de las nociones de probabilidad y estadística. Estos conocimientos de probabilidad y estadística tienen, además, creciente aplicación en múltiples problemas de la vida diaria, como por ejemplo, las estadísticas económicas y meteorológicas frecuentemente publicadas en los periódicos. Por consiguiente, consideramos muy conveniente introducir las principales nociones de probabilidad y estadística en los planes de estudio de la escuela secundaria.[9,12] En las páginas que siguen se tratarán algunos temas simples, aunque importantes, de la física probabilista.

1. TEORIA CINETICA DE LOS GASES

1.1. Información Experimental

Las relaciones entre presión y volumen de aire fueron investigadas experimentalmente, mediante simples e instructivos experimentos, por Robert Boyle (1627-1662) y Edme Mariotte (1620-1684). La expansión de los gases con la temperatura fue estudiada experimentalmente por Louis-Joseph Gay-Lussac (1778-1850). Los resultados experimentales obtenidos por los mencionados investigadores se sintetizan en la llamada ley de los gases perfectos o ideales.

Los principales experimentos que pueden efectuarse con un gas perfecto están descritos en numerosos libros de texto.[4,16,32] Los resultados de dichos experimentos se sintetizan en la ley general de los gases ideales: $pV = RT$, donde p = presión; V = volumen; T = temperatura absoluta, 273° + °C (grados centígrados); R una constante tal que, cuando la masa del gas es igual a la de una molécula gramo, R = 8,317 julio/mol °K (como una caloría es equivalente a 4,18 julios, tenemos que $R \cong 2$ calorías/mol °K).

La teoría cinética de los gases se propone dar una explicación de la indicada ley macroscópica sobre la base de las siguientes hipótesis: a) un gas está constituido por un gran número de partículas atómicas o moleculares; b) las leyes de la mecánica son aplicables a estas partículas. La constatación experimental de las conclusiones que se obtienen de la teoría cinética de los gases indica la aceptabilidad científica del conjunto de hipótesis de dicha teoría. Consecuentemente, de la referida constatación surge una comprobación indirecta de la hipótesis atómica y molecular y de que, como veremos, el calor es una expresión de la energía cinética de dichas partículas.

1.2. Principio del Caos Molecular

Dada la gran cantidad de partículas que hay en la unidad de volumen de un gas a la presión normal, hay que recurrir a la estadística para describir el estado de ese gas. Por eso se introducen algunas hipótesis fundamentales para elaborar sobre ellas toda la teoría.

Es así que enunciamos el principio del caos molecular: "Para moléculas de un gas en un recipiente cerrado, cuando no actúan fuerzas exteriores, todas las posiciones en el recipiente y todas las direcciones de la velocidad son igualmente posibles".

1.3. Presión de un Gas - Energía Interna

Definimos como presión de un gas la fuerza que actúa sobre la unidad de superficie del recipiente que lo contiene.

Cabe considerar que esa fuerza es igual a la variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de las moléculas que golpean la unidad de superficie de la pared.

Consideremos un cubo que contiene un gas de volumen constante a una cierta temperatura T. Sea N el número de moléculas contenidas en el recipiente, m la masa de cada una de ellas y $\bar{V}$ su velocidad media.

Las moléculas en movimiento seguirán, en realidad, un camino en zig-zag, debido a los choques entre partículas y contra las

las paredes del recipiente, y este movimiento irregular puede ser representado por tres componentes ortogonales. Como no hay tendencia a la acumulación de moléculas en lugar alguno del cubo, se supone que $\frac{1}{3}$ de las N moléculas está viajando con una velocidad $\bar{V}$ paralelamente a una arista cualquiera y, por lo tanto, perpendicularmente a las dos caras opuestas correspondientes del cubo. Si l es la longitud de la arista, una de esas moléculas empleará $\frac{l}{\bar{V}}$ segundos en pasar de lado a lado y, en consecuencia, golpeará una cara $\frac{1}{2}\frac{\bar{V}}{l}$ veces por segundo. En cada choque se invierte el sentido de la velocidad de la molécula, de modo que la cantidad de movimiento de la misma pasa de $m\vec{V}$ a $-m\vec{V}$; es decir, la cantidad de movimiento de cada molécula varía en $2m\vec{V}$.

La variación total de la cantidad de movimiento por segundo, de $\frac{N}{3}$ moléculas, al chocar con una cara resulta ser la fuerza media $\bar{f}$ que aquéllas ejercen contra la pared normal en la dirección de la velocidad $\vec{V}$ (véase ecuación [35])

$$\bar{f} = \frac{\Delta(m\bar{V})}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\bar{V}}{l}2m\bar{V} \cdot \frac{1}{3}N = \frac{1}{3}\frac{Nm\bar{V}^2}{l}$$

la presión p será:

$$p = \frac{\bar{f}}{l^2} = \frac{1}{3}\frac{NmV^2}{l^3}$$

Pero l^3 es el volumen v del cubo, de donde

$$pv = \frac{1}{3}Nm\bar{V}^2 \qquad [107]$$

La ecuación de estado de un gas perfecto, según datos suministrados por la experimentación, es:

$$pv = RT = NkT \qquad [108]$$

siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Reemplazando en [107]:

$$\frac{Nm\bar{V}^2}{3} = NkT$$

o sea:

$$\frac{m\bar{V}^2}{3} = kT$$

Multiplicando y dividiendo por 2 el primer miembro, se tiene

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}m\bar{V}^2 = kT,$$

pero el factor $\frac{1}{2}m\bar{V}^2$ es la expresión de la energía cinética media de una partícula:

$$E_c = \frac{1}{2}m\bar{V}^2$$

De las dos últimas ecuaciones resulta:

$$E_c = \frac{3}{2}kT \qquad [109]$$

Hay que señalar que [109] da la expresión de la energía cinética media por partícula cuando las moléculas son monoatómicas. En caso de que fueran biatómicas habría que considerar, además de los tres grados de libertad de traslación, los de rotación (las moléculas biatómicas tendrán, en general, energía cinética de traslación, de rotación y de vibración).

Por cada grado de libertad de una molécula de gas monoatómico, la energía cinética correspondiente es la tercera parte de la indicada en [109], es decir, $\frac{1}{2}kT$.

La energía interna total de un gas monoatómico resulta:

$$U = NE_c = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}RT \qquad [110]$$

donde R, como es sabido, es la constante de los gases perfectos por molécula gramo (idéntica, en nuestro caso, al átomo gramo), aproximadamente igual a 2 cal/°K mol.

Se demuestra, en general, mediante el teorema de la equipartición o equirrepartición de la energía que, dado un conjunto de partículas en equilibrio con s grados de libertad por partícula le corresponde a cada una, por grado de libertad, en mecánica estadística clásica, una energía media igual a $\frac{1}{2}kT$.

1.4 Calor Específico

El principio de conservación de la energía aplicado a un proceso termodinámico se expresa:

$$\Delta Q = dU + pdv \qquad [111]$$

donde ΔQ es el incremento de calor suministrado al sistema considerado que, en este caso, es un recipiente que contiene N partículas.

Por lo tanto, en palabras, [111] expresa que la cantidad de calor suministrada a un gas se invierte en incrementar su energía interna dU y en efectuar un trabajo exterior pdv; esta relación expresa el llamado primer principio de la termodinámica.

Teniendo en cuenta [110] y [111] resulta:

$$\Delta Q = d(\frac{3}{2}kNT) + pdv \qquad [112]$$

Ahora bien, el calor específico de una substancia está dado por la energía que debe proporcionarse a la misma para elevar la temperatura de la unidad de masa de la substancia en un grado centígrado. En el caso de un gas, resulta que se pueden definir distintos calores específicos de acuerdo con el proceso que se siga en su determinación. En efecto, se puede incrementar la temperatura de un gas manteniendo constante su volumen o la presión, o también en un proceso mixto.

Para el caso de un gas monoatómico, el calor específico a volumen constante será, teniendo en cuenta [110],

$$c_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}kN = \frac{3}{2}R$$

y el calor específico a presión constante es, usando [112],

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \frac{dU}{dT} + p\frac{dv}{dT}$$

y como por [108] resulta $p\frac{dv}{dT} = kN$, entonces:

$$c_p = \frac{3}{2}kN + kN = \frac{5}{2}kN = \frac{5}{2}R$$

Para un gas biatómico, en el que las moléculas pueden girar en torno a dos ejes de simetría, el número de grados de libertad se eleva a 5, y resulta entonces:

$$c_v = \frac{5}{2}R$$

$$c_p = \frac{7}{2}R$$

1.5 Ley de Dulong y Petit

En un sólido, el cambio de volumen al variar la temperatura es pequeño comparado con el volumen del mismo, por lo que el calor específico de un sólido a volumen constante es aproximadamente igual al calor específico a presión constante. Las determinaciones del calor específico de los sólidos se efectúan a la presión atmosférica. El calor específico de una molécula gramo de una substancia en estado sólido es aproximadamente igual a 6 cal/grado.

Supongamos que el sólido está constituido por N partículas distribuidas o dispuestas según una estructura geométrica. Cada partícula, por cada dirección de los tres ejes de coordenadas, tiene energía cinética y energía potencial. Aplicando el citado teorema de la equirrepartición de la energía resulta que el valor medio de la energía potencial y cinética por partícula y por eje de coordenadas es igual, para cada una de esas energías, a $\frac{1}{2}kT$. Es decir, el valor medio de la energía cinética más la energía potencial por partícula y por eje de coordenadas es igual a kT. Por consiguiente, la energía total de la molécula gramo de una substancia en estado sólido sería igual a $3NkT$:

$$U = 3NkT = 3RT$$

y como

$$c_p \cong c_v = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R$$

siendo

$$R \cong 2 \text{ cal}/^{\circ}K$$

tenemos que:

$$c_v \cong 6 \frac{\text{cal}}{^{\circ}K}$$

Esta ley tiene una importancia notable para hallar el valor de la molécula gramo de una determinada substancia.

La ley es simplemente aproximada. La variación del calor específico de un sólido en función de la temperatura absoluta se representa aproximadamente en el gráfico de la figura 43. El calor específico es nulo para 0 °K y va creciendo al incrementarse la temperatura hasta 6 cal/°K.

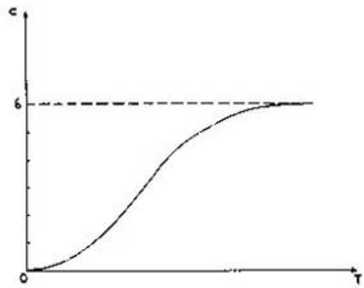


Fig. 43

El estudio de la variación del calor específico de un sólido en función de la temperatura absoluta es un problema importante de la física cuántica. Fue resuelto por aproximaciones sucesivas por Einstein, Debye y Blackman.

1.6 Leyes de Distribución de Boltzmann-Maxwell

Resulta imposible determinar el número exacto de moléculas que en un momento dado se encuentran en un elemento de volumen. Por eso hallamos el término medio del número de moléculas, aplicando para ello el cálculo de probabilidades.[6,40]

Supongamos que se tiene un cuadro o tablero dividido en s celdas de diversos tamaños y arrojamos al azar sobre él un número N de bolitas. Veamos ahora cuál es la probabilidad de que esas bolitas tengan una determinada distribución, representada por los números $n_1, n_2, \ldots, n_s$. La cantidad de bolitas que para esa distribución hay en la celda i se representa por n_i.

Se debe cumplir que

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = N$$

Si w_j es la superficie de la celda j y w la superficie total del tablero, llamaremos g_j a

$$g_j = \frac{w_j}{w}$$

siendo entonces

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_s = 1$$

Es evidente que si todas las bolitas son iguales obtenemos la misma distribución si permutamos las bolitas entre sí. El número de esas permutaciones es N!. Pero así incluimos las permutaciones entre las bolitas de una misma celda, que no representan nuevas posibilidades de realización de la distribución considerada, por no importarnos el orden de las bolitas en cada celda. Luego, debemos dividir N! por el número de permutaciones de las bolitas de la primera celda y así sucesivamente. En consecuencia, el número de maneras diferentes en que podemos obtener la indicada distribución de bolitas será:

$$\frac{N!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_s!}$$

Este número se suele llamar, en teoría cinética, *número de complexiones*.

La probabilidad de que una bolita caiga en la celda de superficie w_1 es igual a $g_1 = \frac{w_1}{w}$. Es decir, dicha probabilidad es igual a la relación entre el tamaño de la celda considerada y el de la superficie total. La probabilidad de que una misma bolilla en dos lances sucesivos, o de que dos bolillas caigan simultáneamente, en la misma celda será g_1^2 y, consecuentemente, la probabilidad de que caigan en una misma celda n_1 bolillas es:

$$g_1^{n_1}$$

La probabilidad de que se dé la distribución indicada en el tablero es, entonces:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_s!} g_1^{n_1} \cdot g_2^{n_2} \ldots g_s^{n_s} \qquad [113]$$

Apliquemos todo esto al caso concreto de la distribución en un gas.

Consideremos un gas monoatómico de N partículas contenido en un recipiente de volumen V. El estado de cada partícula queda determinado por tres coordenadas de posición y por las tres componentes del vector velocidad. Es decir, se necesitan seis coordenadas para determinar la posición y la velocidad de una molécula monoatómica. El estado mecánico del conjunto de las N partículas del gas queda, por lo tanto, perfectamente definido por un punto en el espacio de 6N dimensiones (3N de posición y 3N de velocidades o de cantidades de movimiento) llamado espacio de las fases; por lo general se representan las coordenadas de posición generalizadas por $q_1, q_2, \ldots, q_{3N}$ y las correspondientes cantidades de movimiento por $p_1, p_2, \ldots, p_{3N}$ (véase la sección 7.3 del capítulo quinto).

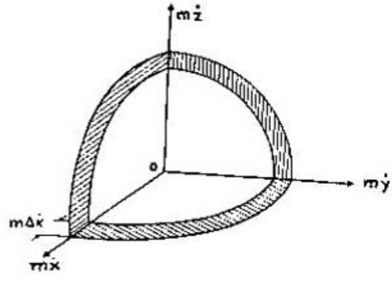


Fig. 44

Si representamos el vector $\vec{p}$ en el sistema de ejes de la figura 44, su extremo caerá en un punto de la superficie esférica de radio $|\vec{p}|$ ya que

$$|\vec{p}| = \sqrt{(m\dot{x})^2 + (m\dot{y})^2 + (m\dot{z})^2}$$

Todas las partículas que estén en condiciones análogas tendrán el mismo $|\vec{p}|$ y, por consiguiente, igual energía cinética. En consecuencia, las partículas cuyo vector $\vec{p} = m\vec{v}$ es tal que su extremo esté comprendido entre las esferas de radio $|\vec{p}|$ y $|\vec{p}+\Delta\vec{p}|$

tendrán la energía cinética ϵ_i comprendida entre $\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ y $\frac{1}{2}\frac{(p+\Delta p)^2}{m}$. Por lo tanto el volumen del espacio de las cantidades de movimiento correspondiente al indicado intervalo de energía será igual a $4\pi p^2 \Delta p$. Como la partícula considerada puede ocupar cualquier posición en el recipiente que la contiene, tenemos que el volumen del espacio de las fases correspondientes a dicha partícula con energía ϵ_i será, teniendo en cuenta que es igual al producto del volumen del espacio de configuración (de las coordenadas de posición) por el correspondiente volumen del espacio de las cantidades de movimiento,

$$w_i = w(p) = 4\pi V p^2 \Delta p$$

Los valores $w_i = w(p)$ se llaman los pesos de los niveles de energía ϵ_i.

El volumen asequible del espacio de las fases es finito debido a que la energía total de las partículas que integran el gas dado es finita. Por lo tanto g_i, la probabilidad de que una partícula tenga una energía comprendida entre los límites precedentemente indicados, será proporcional a $w_i = u(p)$ y así podemos escribir:

$$g_i = A \cdot 4\pi v^2 dv$$

siendo A un factor de normalización que debe cumplir el requisito de que la probabilidad extendida a todo el espacio de las fases accesibles sea igual a 1.

Una distribución posible de las moléculas se puede expresar así:

$$n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_s$$

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_i, \ldots, \epsilon_s$$

donde n_i representa el número de moléculas en la celda de energía ϵ_i, debiendo cumplirse

$$\sum_{i=1}^{s} n_i = N \qquad [114]$$

y, además,

$$\sum_{i=1}^{s} \epsilon_i n_i = E_t \qquad [115]$$

siendo E_t la energía total del gas, que se supone constante.

Recordando la fórmula de Stirling

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N!\,e^{N}}{N^{N}} = 1$$

o

$$\ln N! \cong N(\ln N - 1) \qquad [116]$$

y tomando logaritmos en la [113] y usando la [114], resulta:

$$\begin{aligned} \ln P &= N(\ln N - 1) - \sum_{i=1}^{s} n_i(\ln n_i - 1) + \sum_{i=1}^{s} n_i \ln g_i = \\ &= N \ln N - \sum_{i=1}^{s} n_i \,.\, \ln(n_i) + \sum_{i=1}^{s} n_i \ln g_i \end{aligned} \qquad [117]$$

La expresión [117] nos da la probabilidad de la distribución dada de las moléculas respecto de las celdas de extensión ω_i. Para encontrar la distribución más probable se debe calcular el máximo del logaritmo de P para una variación de los números $n_1, n_2, \ldots, n_s$, sujeta a las condiciones [114] y [115], o sea:

$$\delta \ln P = 0 \quad \therefore \quad - \sum_{i=1}^{s} \delta n_i \ln(n_i) - \sum_{i=1}^{s} \delta n_i + \sum_{i=1}^{s} \delta n_i \ln g_i = 0$$

como

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} n_i = cte \\ \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i n_i = cte \end{cases}$$

será:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} \delta n_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i \delta n_i = 0 \end{cases}$$

Las expresiones que definen este máximo son, en definitiva:

$$\begin{cases} - \sum_{i=1}^{s} \delta n_i \ln(n_i) + \sum_{i=1}^{s} \delta n_i \ln g_i = 0 & [118] \\ \sum_{i=1}^{s} \delta n_i = 0 & [119] \\ \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i \delta n_i = 0 & [120] \end{cases}$$

Para resolver este sistema aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Multiplicamos la [119] y la [120] por dos coeficientes indeterminados α y β, respectivamente. Luego, sumamos las tres ecuaciones, y resulta:

$$\sum_{i=1}^{s} \delta n_i(-\ln n_i + \ln g_i + \alpha + \beta\varepsilon_i) = 0 \qquad [121]$$

Para esta distribución tenemos dos condiciones que deben satisfacer las variaciones δn_i; por lo tanto, de las variaciones de los $n_i (= \delta n_i)$ dos son dependientes y $s - 2$ de ellas son independientes.

Para que se cumpla [121], como $s - 2$ de las variaciones δn_i son arbitrarias, es necesario que las cantidades entre paréntesis sean nulas. Para las otras dos variaciones de δn_i que no pueden variar arbitrariamente podemos hacer, sin embargo, nulas las cantidades encerradas en los correspondientes paréntesis, dado que tenemos dos coeficientes, α y β, que podemos elegir arbitrariamente. Resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\ln n_i - \ln g_i + \alpha + \beta\varepsilon_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \qquad [122]$$

He aquí la gran ventaja de emplear el método de los multiplicadores de Lagrange. La [122] se puede expresar: 121

$$\ln \frac{n_i}{g_i} = \alpha + \beta\varepsilon_i$$

y dado que los valores n_i son pequeños podemos poner en su lugar dn que será una función de p

$$dn(p) = g_i e^{\alpha + \beta\varepsilon_i} \qquad [123]$$

Esta última expresión nos da la distribución más probable de las moléculas. Recordando la expresión de g_i y teniendo en cuenta que la energía media por partícula es

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} m v_i^2$$

resulta:

$$dn_i = A 4\pi V^2 e^{\left(\alpha + \frac{\beta m v^2}{2}\right)} dv \qquad [124]$$

Esta fórmula nos da la distribución más probable de las moléculas según la velocidad, la que se suele llamar distribución canónica.

Como el número total de partículas es constante y el signo de β debe ser negativo, puesto que en caso contrario la integral definida daría infinito, tenemos:

$$N = \sum n_i = A4\pi e^{\alpha}\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv \qquad [125]$$

de donde podemos escribir:

$$Ae^{\alpha} = e^{\alpha'} = \frac{N}{4\pi\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv}$$

Por lo tanto podemos expresar la relación [124]:

$$dn_i = \frac{VNe^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv}{\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv}$$

Sabiendo que:

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

y derivando $I(\lambda)$ respecto a λ, tenemos:

$$I'(\lambda) = -\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = -\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\lambda^{-\frac{3}{2}} \qquad [126]$$

Comparando [125] y [126], y haciendo $\frac{\beta m}{2} = \lambda$, tenemos:

$$N = 4\pi e^{\alpha'}\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \qquad N = \pi e^{\alpha'}\sqrt{\pi}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad [127]$$

La relación [127] nos permite despejar α' en función de N y β.

Calculemos ahora la energía total del gas, reemplazando en [115] los valores de ϵ_i y n_i dados por [124]:

$$E = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2} m v^2 4\pi v^2 e^{\left(\alpha' - \frac{\beta \cdot m v^2}{2}\right)} dv$$

Haciendo $\qquad B = e^{\alpha'}$

es $\qquad E = B\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2} m v^4 4\pi e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} dv$

Como la sumatoria se convierte en integral, resulta:

$$E = B\int_0^{\infty} 4\frac{1}{2}mv^4\pi e^{-\frac{\beta m v^2}{2}}\,dv$$

$$\therefore \qquad E = B\cdot 2\pi m\int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}}\,dv \qquad [128]$$

Despejando $B = e^{\alpha'}$ de [127]:

$$B = \frac{N}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad [129]$$

Reemplazando el valor de B obtenido en [129] en la expresión [128]:

$$E = \frac{N}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{\frac{3}{2}} 2\pi m\int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}}\,dv \qquad [130]$$

La integral de [130] es la derivada de la integral de [125] respecto a $\lambda = \frac{\beta m}{2}$. Por lo tanto, su solución será también derivada de la solución de [125], es decir:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\lambda^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\frac{3}{2}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Reemplazando en [130] se tiene:

$$E = \frac{N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2m\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}Nm\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-1}$$

Pero recordemos que la energía interna de un gas es también igual a

$$E = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{4}Nm\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-1}$$

Despejando de esta última expresión β, obtenemos:

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

Reemplazando en la [129], obtenemos:

$$e^{\alpha'} = \frac{N}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Reemplazando los valores de α' y β en [124] queda

$$dn(v) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv \qquad [131]$$

que es la ecuación de Boltzmann-Maxwell de la distribución de las moléculas respecto de las velocidades.

En el caso de que tengamos las partículas en equilibrio y distintos niveles de energía, se puede calcular la distribución de las partículas respecto de las energías.

El número de partículas en cada nivel de energía será proporcional a la energía correspondiente; es decir, de acuerdo con [131]:

$$n_{\varepsilon_i} = C_e^{-\frac{\varepsilon_i}{KT}}$$

1.7 Camino Libre Medio

Consideremos las moléculas de un gas como esferas de diámetro σ, y veamos cuál es el número de choques de una partícula en su marcha a través del gas. Para que se produzca el choque entre dos moléculas, la distancia que separa sus centros debe ser menor que el diámetro de las partículas.

Consideremos en primera aproximación que una esfera de radio igual a σ (llamada *esfera de choque*) viaja con una velocidad igual a la velocidad media de las partículas del gas (Fig. 45). Por lo tanto, el volumen barrido por la esfera de choque en la unidad de tiempo será

$$\pi\sigma^2\bar{V} \qquad [132]$$

Si llamamos n al número de partículas por unidad de volumen, tenemos que el número promedio de choques en la unidad de tiempo se obtiene multiplicando [132] por n:

$$\text{número de choques} = \bar{V}\sigma^2\pi n$$

Si a la distancia que recorre la partícula entre choque y choque la llamamos *camino libre medio* y la representamos por l, el número de choques por segundo será:

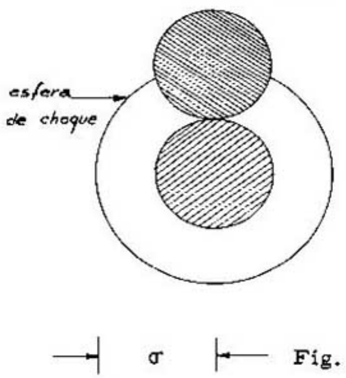


Fig. 45

$$\text{número de choques} = \frac{\bar{V}}{l}$$

y el camino libre medio deducido de la igualdad de ambas expresiones

$$l = \frac{1}{\pi\sigma^2 n} \qquad [133]$$

Si se hiciera un estudio detallado de la teoría de los choques entre partícula y partícula de un gas, teniendo en cuenta la distribución de velocidades Boltzmann-Maxwell y los distintos movimientos relativos posibles entre dos partículas, se obtendría una fórmula cuyo orden de magnitud es el mismo que el dado por [133].

2. MOVIMIENTO BROWNIANO

En 1827, el médico inglés Robert Brown (1773-1858) constató por primera vez el hecho de que partículas muy pequeñas de materia inerte, suspendidas en un líquido, observadas con un microscopio, presentan agitación constante que al parecer no responde a ninguna ley establecida.

Las principales características del movimiento browniano son:

a) El movimiento de agitación no depende del tiempo.
b) El movimiento no depende de la naturaleza química del fluido.
c) El movimiento es aparentemente al azar.
d) La agitación es mayor cuanto más pequeñas son las partículas.
e) La agitación aumenta con la temperatura.
f) La magnitud del movimiento es mayor si la viscosidad del medio es menor.

Gracias a los estudios teóricos de Albert Einstein, en 1905, se demostró que el movimiento browniano es una prueba concluyente, desde el punto de vista físico, de la atomicidad de la materia.

2.1 Ley de las Atmósferas

Consideremos un líquido con partículas coloidales en suspensión. Dividamos el recipiente en dos secciones, separadas en dh, y supongamos aplicable la ley de los gases perfectos a partículas del tamaño de los coloides. Si p es la presión en la sección 1, y $p - dp$ es la presión en la sección 2 (Fig. 46), será:

$$pv = \mathrm{R}T = \mathrm{N}kT \quad \therefore \quad p = \frac{\mathrm{N}}{v}kT = nkT$$

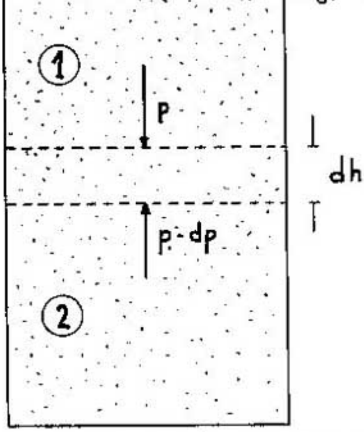
y también

$$dp = dnkT \qquad [134]$$

dado que T es constante.

Por la acción de la fuerza de la gravedad, las partículas caen, pero si la densidad de las partículas coloidales aumenta al disminuir la altura h, se producirá, por [134], un incremento de la presión de abajo hacia arriba. Llegará un momento en que la distribución de las partículas coloidales en función de la altura alcanzará valores estacionarios.

Fig. 46



El número de partículas por unidad de volumen será una función de la altura del líquido. Siempre habrá más partículas en la zona inferior y, por lo tanto, será mayor la presión, La relación entre la presión y el peso, en el estado de equilibrio, está dada por:

$$-dp = n \cdot mg\,dh \qquad [135]$$

siendo nmg el peso, n la densidad de partículas en ese nivel, y m la masa eficaz del empuje de Arquímedes.

La [135] se puede escribir también:

$$dp + nmg\,dh = 0$$

Recordando [134], resulta:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg\,dh}{kT}$$

Integrando:

$$\int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n} = \int_0^h -\frac{mg}{kT}\,dh \quad \therefore \quad \ln\frac{n}{n_0} = -\frac{mgh}{kT}$$

$$\therefore \quad n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \qquad [136]$$

donde n_0 es la densidad de partículas en el nivel cero y n el número de partículas por unidad de volumen a la altura h. La expresión [136] es la llamada *ley de las atmósferas*, enunciada por primera vez por Laplace.

Basándose en esta ley, Perrin ideó un método para determinar el número de Avogadro, por el cual se le otorgó el premio Nobel.

Utilizó una emulsión de goma en alcohol que arrojaba en agua, obteniendo partículas coloidales de goma.

Por la ley de Stokes, la partícula coloidal estará en equilibrio cuando la fuerza de gravedad sea igual a la fuerza que se opone al movimiento, dada por:

$$F = 6\pi\eta a v$$

donde: a = radio de la partícula;
η = coeficiente de viscosidad del líquido, y
v = velocidad de caída de la partícula.

Por lo tanto, debe ser:

$$6\pi\eta a v = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho - \rho')g \qquad [137]$$

donde: ρ = densidad de la partícula, y
ρ' = densidad del medio.

El segundo miembro de [137] nos da la fuerza de gravedad o peso, que es igual al volumen de la partícula por la aceleración de la gravedad y por la densidad de la partícula, que es $\rho - \rho'$ porque se considera el empuje de Arquímedes. En la fórmula [137] se conocen por observación los valores de v, η y ρ'.

El valor de la densidad ρ de las partículas fue calculado por Perrin por varios métodos (uno de ellos, el del picnómetro). Puede calcularse, entonces, el valor del radio a de la partícula. La masa de las partículas será, entonces:

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho - \rho')$$

De la expresión [136] se puede despejar el valor de k, la constante de Boltzmann, ya que n y n_0 se pueden determinar (con un catetómetro). Determinada así la constante de Boltzmann, se puede calcular el número de Avogadro, recordando que:

$$R = N \cdot k \quad \therefore \quad N = \frac{R}{k}$$

Perrin obtuvo por este método valores de N comprendidos entre $6{,}5 \times 10^{23}$ y $7{,}2 \times 10^{23}$.

2.2 Ecuación del Movimiento Browniano

El movimiento browniano es el movimiento rectilíneo de partículas en un medio resistente provocado por la acción de una fuerza resultante del bombardeo molecular, en promedio constante, cuya componente según el eje de las x es X.

Aplicando la ley de la dinámica de Newton, la ecuación del movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F_x + X \qquad [138]$$

donde F_x es la fuerza resistente dada por la fórmula de Stokes:

$$F_x = -6\pi\eta a\dot{x} = -f\dot{x} \qquad (f = 6\pi\eta a)$$

La expresión [138] se puede escribir:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{dx}{dt} + X \qquad [139]$$

Multiplicando la velocidad por x, tenemos:

$$x\frac{dx}{dt} = x \cdot \dot{x}$$

derivando, resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right) = x\ddot{x} + \dot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt}(x \cdot \dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2$$

$$\therefore \qquad x \cdot \ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad [140]$$

Multiplicando la [140] por m será:

$$\frac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}x^2 - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = mx\frac{d^2x}{dt^2} \qquad [141]$$

Si multiplicamos la [139] por x, es:

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{dx}{dt} \cdot x + xX \qquad [142]$$

Igualando [141] y [142] queda:

$$\frac{1}{2}m\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -xf\frac{dx}{dt} + xX$$

que también puede escribirse:

$$-x \cdot f \cdot \frac{dx}{dt} + xX = -\frac{1}{2} \cdot f \cdot \frac{dx^2}{dt} + x \cdot X$$

o sea:

$$\frac{1}{2}m\frac{d^2(x^2)}{dt^2} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{f}{2}\frac{d}{dt}(x^2) + xX \qquad [143]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento de cada partícula.

Si consideramos el promedio de cada término de [143]:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{1}{2}kT$$

y como la fuerza propulsora de la partícula es independiente de la posición de la misma, al hallar el promedio en un tiempo grande, éste se anulará, ya que para un valor de x determinado, las probabilidades de que X sea positivo o negativo son las mismas. Es decir, al final del intervalo de tiempo será

$$\overline{xX} = 0$$

Finalmente, si llamamos a $\frac{d}{dt}\bar{x}^2 = z$ la [143] quedará, al hallar el promedio,

$$\frac{1}{2}m\frac{dz}{dt} = kT - \frac{f}{2}z$$

Separando variables se obtiene:

$$\frac{dz}{z - \frac{2kT}{f}} = -\frac{f}{m}dt \qquad [144]$$

Integrando entre 0 y t:

$$\left[\ln\left(z - \frac{2kT}{f}\right)\right]_0^z = -\frac{f}{m}[t]_0^t \quad \therefore$$

$$\ln\left(\frac{z - \frac{2kT}{f}}{-\frac{2kT}{f}}\right) = -\frac{f}{m}t$$

$$z = \frac{2kT}{f}\left(1 - e^{-\frac{f}{m}t}\right)$$

Se obtiene así una expresión analítica del movimiento browniano.

Para un valor del radio a de la partícula de 10^{-4} cm y un coeficiente de viscosidad $\eta = 10^{-2}\frac{gr}{cm.s}$ resulta el coeficiente $\frac{f}{m}$ del orden de 10^6.

Si al integrar [144] tomamos el intervalo de tiempo mayor que 10^{-6} segundos, la expresión tiende rápidamente a cero. Por lo tanto, para cualquier intervalo de tiempo medible será:

$$z = \frac{2kT}{f} = \frac{d}{dt}(\bar{x}^2) \qquad [145]$$

Integrando respecto al tiempo:

$$\bar{x}^2 = \frac{2kT}{f}t$$

pero $f = 6\pi\eta a$:

$$\bar{x}^2 = \frac{kTt}{3\pi a\eta} \qquad [146]$$

y como es $k = \frac{R}{N}$ resulta finalmente:

$$\bar{x}^2 = \frac{RTt}{3\eta\pi Na}$$

Observando [146] vemos que podemos calcular k, ya que T y η son perfectamente medibles y, además, a se puede observar y medir en el microscopio. Para obtener $\bar{x}^2$ se realizan observaciones de x en un intervalo de tiempo cualquiera y luego se halla el promedio, que será:

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}$$

donde n es el número de observaciones hechas. Queda, pues, bien definido el procedimiento físico que debe seguirse para determinar el valor numérico de la constante k de Boltzmann. A esa descripción física es lo que se llama la definición operacional o la regla semántica del símbolo k. A dicha descripción llaman algunos autores descripción semántica del considerado símbolo. Lo fundamental es el concepto que corresponde a la definición operacional de un símbolo, y no las palabras que se empleen para designarlo. Recordando que $R = Nk$, siendo N el número de partículas de un gas por molécula-gramo, se ve que, por lo dicho precedentemente, podemos dar una definición operacional de dicho número. Es fácil comprender que sin definiciones operacionales, tal como se la ha explicado, no puede existir la física.

7

CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS

A partir de lo desarrollado ya haremos algunas reflexiones de carácter general acerca de los procedimientos que se siguen en la elaboración de los conocimientos de la física.[8,19,37,47,49,50,51,66] Desde el punto de vista de su verdadera comprensión es mucho más importante tener una noción clara de cómo una ciencia avanza y conquista nuevos horizontes, que limitarse a conocer sus resultados. Estos son sumamente importantes para la aplicación de la física, pero generalmente los que la aplican no siempre la comprenden bien.

1. ASPECTOS PRINCIPALES DE LA METODOLOGIA CIENTIFICA

Recapitulemos rápidamente el camino seguido en la construcción de la teoría de la mecánica clásica. Se aislaron del complejo de los fenómenos naturales algunos casos fáciles de observar repetidas veces. Es indispensable disecar algunos aspectos y procesos de la realidad para poderlos analizar como es debido. La ciencia parte de los procesos más sencillos y de problemas precisos para analizarlos exhaustivamente. Primero se procede a la acumulación y clasificación de datos que se obtienen mediante la observación y la experimentación de los procesos estudiados. Luego, el investigador trata de establecer, mediante la creación de conceptos y definiciones operacionales (espacio, tiempo, velocidad, aceleración, masa, fuerza, impulso, trabajo, energía, etc.) la existencia de leyes empíricas, es decir, relaciones entre dos o más de las magnitudes mencionadas, al mismo tiempo que formula hipótesis, las que desarrolla en forma deductiva para determinar, mediante la confrontación de sus conclusiones con los resultados experimentales, si pueden o no ser útiles al caso o a los casos que analiza. En esta formulación de hipótesis, juega un papel importantísimo la capacidad creadora del científico. Para Mach,[49] la función esencial de una hipótesis "consiste en la posibilidad de sugerir nuevas observaciones y experimentos, por los que nuestra conjetura es confirmada, refutada o modificada, mediante lo cual nuestra experiencia se expande". Hay una estrecha interconexión entre experimento y teoría en la estructuración de una teoría científica.[49] Todo experimento presupone cierta teoría. De los resultados experimentales, la formulación de nuevas definiciones y la creación de hipótesis se amplía la estructura de la teoría correspondiente. De esa manera, como hemos visto, se elaboran las principales leyes de la mecánica. Más tarde, mediante la creación de nuevos conceptos y nociones (trabajos virtuales, coordenadas generalizadas, función potencial, sistemas conservativos, variables conjugadas, etc.) se crean leyes más generales que implican a las anteriores como casos particulares. Llegamos así al principio variacional de Hamilton, que es el más general de la mecánica clásica. Las demás ramas de la física han seguido en su desarrollo un camino análogo.

Después de formulados los principios más generales y abstractos correspondientes a una disciplina científica, es posible, a partir de ellos, tomados como postulados, y de un conjunto mínimo de definiciones, construir una teoría deductiva de la que surjan a manera de teoremas las diferentes leyes particulares. Desde un punto de vista estético y formal este último procedimiento resulta mucho más satisfactorio; pero tal presentación necesariamente es mucho más abstracta, puesto que representa un procedimiento inverso al seguido históricamente y, en consecuencia, no puede proporcionar la génesis de los diversos conceptos, leyes, definiciones, etc. Desde un punto de vista pedagógico [11,12] es preferible un desarrollo que siga, en sus grandes etapas, el camino histórico-metodológico. Con la elaboración de teorías científicas sucede algo en cierto modo parecido a la construcción de un edificio, la que requiere complejos andamiajes, grúas, escaleras, hormigoneras, etc. Todo esto desaparece una vez terminado el edificio y lo podemos recorrer y estudiar usando sus rápidos y cómodos ascensores. Pero, sólo por este camino no podemos tener una idea clara de cómo se construyó en realidad.

El formalismo, es decir, la lógica y la matemática, tienen en la elaboración de la ciencia un importantísimo valor, como se ha puesto de manifiesto por medio de los distintos y sencillos casos que hemos considerado en esta monografía. Sirve para conectar coherentemente el mayor número de sucesos observables diferentes a partir de un número mínimo de conceptos y postulados o hipótesis. Los resultados de la observación y la experimentación son tan importantes en la ciencia del mundo real, como lo son los sonidos en la música. Así como éstos deben ser organizados de cierta manera para producir una hermosa sinfonía, también los referidos resultados del mundo real deben estar conectados por una estructura lógica a partir de un conjunto de conceptos y postulados básicos para formar una teoría científica. Por coherente que sea la parte matemática de una teoría, el valor que pueda tener para describir y explicar una parte del mundo real solamente lo determinan la experimentación y la observación.

Una teoría física está constituida por una estructura formal (lógico-matemática) y por una interpretación que permite, de manera bien definida, vincular sus conclusiones con los resultados experimentales. Una tal interpretación requiere necesariamente que los símbolos con significado físico de su estructura matemática tengan, directa o indirectamente, definiciones operacionales o reglas semánticas; esdecir, que indiquen qué operaciones y mediciones físicas deben efectuarse en cada caso para determinar sus respectivos valores numéricos. Las definiciones operacionales son el medio de establecer, de la mejor manera posible, la confrontación entre una teoría y los resultados experimentales.

La lógica y la matemática por sí solas, sin conexiones concretas con los resultados de la observación y la experimentación, no pueden decirnos nada nuevo con respecto al mundo de los fenómenos naturales. La validez de la matemática no radica en la confirmación experimental de sus conclusiones, sino que deriva de la lógica y de las definiciones que determinan el significado de los conceptos y signos que utiliza. De aquí que pueda decirse en cierto modo que la matemática es cierta por definición. La absoluta certeza de las conclusiones matemáticas se debe a que en realidad todo lo que se afirma en los teoremas está dicho, de manera implícita, en los correspondientes axiomas de partida. Es decir, que las conclusiones son ciertas si los postulados y axiomas son ciertos. De ahí que el genial matemático y filósofo Bertrand Russell haya dado la siguiente definición de la matemática, aparentemente paradójica:[55] "la ciencia en la que nunca sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad". No se sabe de lo que se habla en realidad, porque se parte de axiomas y definiciones que tienen un amplio margen de generalidad, es decir, que pueden ser aplicados a muchos casos diferentes; y no se sabe si lo que se dice es verdad hasta que se den las reglas semánticas o definiciones operacionales que permitan aplicarla. La matemática pura razona de manera condicional: si tales cosas son ciertas, se deduce que tales otras también lo son; pero no investiga si las proposiciones de partida son verdaderas.

En matemática se establecen relaciones entre entes abstractos representados por símbolos, cuyo significado queda determinado por los axiomas y definiciones de la correspondiente estructura matemática. Por lo tanto, si los axiomas no son contradictorios entre sí y las operaciones lógicas con los símbolos son rigurosamente definidas, se deducen nuevas relaciones o teoremas entre los símbolos de la teoría. Para que un modelo matemático pueda constituir una teoría física es necesario darle una interpretación concreta; vale decir, dar a los símbolos de la teoría, que no representan operaciones, transformaciones o representaciones meramente matemáticas, una definición operacional que, directa o indirectamente, los conecte con los hechos de la realidad que la considerada teoría se propone describir. Por otra parte, la matemática es de extraordinaria importancia en física porque constituye un lenguaje de alta precisión y de extraordinario poder de síntesis. Cualquier ley de la física, por ejemplo la ley de la gravitación de Newton [26], encierra en muy pocos símbolos, en este caso nueve, una ley aplicable a un número infinito de casos y circunstancias distintas. Aún si aplicamos la fórmula [26] al caso particular de la Tierra y la Luna, se necesita, para expresar en palabras la ley considerada, un número muy grande de símbolos del alfabeto. Claro está que para que dicha ley tenga significado físico es necesario agregar las definiciones concretas de cada uno de los símbolos que en ella aparecen. Podría definirse un coeficiente de síntesis para cada ley mediante el cociente del número de símbolos empleados en la misma dividido por el número de símbolos del alfabeto del lenguaje empleado para expresar en palabras el significado de la correspondiente ley. Cuanto más general sea ésta tanto más pequeño será el valor de dicho coeficiente.

Como en general una ley representa, potencialmente, los posibles resultados de un número infinito de experiencias u observaciones, y como no podemos realizar más que un número finito de ellas, resulta que las teorías sobre el mundo real tienen un valor estadístico: la plausibilidad de una teoría aumenta con el número de sus conclusiones teóricas, que son confirmadas experimentalmente; pero jamás puede afirmarse que una teoría del mundo real sea absolutamente cierta. En las teorías modernas de física, los conceptos básicos de las mismas se hallan conectados, por medio de una larga cadena de razonamientos, con ciertas conclusiones de las teorías que pueden, mediante definiciones operacionales, ser verificadas experimentalmente o por la observación. Pero, por abstracta que sea la teoría física, la verdad de la misma, como ha dicho Einstein, solamente puede ser decidida por la experiencia. Las distintas teorías formales son, si se nos permite un símil, como los trajes de confección, que para saber si quedan bien al cuerpo hay que probarlos y, de acuerdo con los resultados de las pruebas, o los aceptamos tal como están, o se hacen las modificaciones o retoques necesarios, o se rechazan de plano si no son adaptables. Con las diversas teorías lógico-matemáticas que se pueden concebir se procede de manera algo similar para determinar si se ajustan bien al mundo real, o si hay que modificarlas parcialmente, o si hay que descartarlas por resultar totalmente inapropiadas para el fin propuesto.

El método de la física puede sintetizarse diciendo que es experimental-hipotético-deductivo-experimental. Se parte de la experimentación y se termina en la experimentación, la que constituye, según expresión de Henri Poincaré, "el tribunal supremo de apelación de todas las teorías científicas acerca del mundo real".

2. COMPROBACION DE LA MECANICA NEWTONIANA EN ASTRONOMIA

La mecánica clásica, desde fines del siglo XVIII, se convirtió en la parte de la ciencia más evolucionada, y se la consideraba como el modelo que las demás ramas científicas debían seguir en su desarrollo. Más aún, sus notables éxitos en la explicación y predicción de los movimientos planetarios, así como también su utilidad en el cálculo de los distintos movimientos de los cuerpos y mecanismos que interesan en la vida diaria e industrial, le crearon una aureola de prestigio extraordinario. La teoría de los movimientos de los cuerpos celestes de Newton está formada, conjuntamente, por su hipótesis de la gravitación universal y las leyes básicas de su mecánica. Las perturbaciones con respecto a la órbita correcta del planeta Urano fueron analizadas,[18] independientemente, por el astrónomo John Couch Adams (1819-1892) en Cambridge, Inglaterra, y por el matemático francés U. J. J. Leverrier (1811-1877). Las desviaciones indicadas de Urano eran menores de dos minutos de arco. Sobre esta base --la mecánica newtoniana y una gran habilidad matemática-- llegaron a la conclusión de que dichas perturbaciones se podían explicar postulando la existencia de un nuevo planeta. El primero en determinar la posición aproximada y la órbita probable del planeta no visto hasta ese entonces fue Adams, quien en octubre de 1845 comunicó los resultados de su trabajo al entonces astrónomo real, Airy, el que no le dio mayor crédito. En agosto de 1846 Leverrier también determinó la posición y la órbita del hipotético planeta. Leverrier escribió al Observatorio de Berlín solicitando la observación del supuesto planeta, para lo cual indicaba su probable posición de acuerdo con sus cálculos. El 23 de setiembre de 1846, J. G. Galle (1812-1910) encontró el nuevo planeta dentro de un error de un grado del lugar predicho por Leverrier. Al nuevo planeta se le llamó Neptuno. Este maravilloso descubrimiento constituyó una rotunda confirmación de la mecánica newtoniana.

3. AUGE DEL MECANISMO

También debemos tener presente que la mecánica newtoniana fue básica en la invención de mecanismos y máquinas que iniciaron y contribuyeron al desenvolvimiento de la llamada revolución industrial.

La mecánica clásica se convirtió por su utilidad y la precisión de sus predicciones en la quintaesencia de la ciencia. Se consideraba que todo conocimiento, para merecer la categoría de científico, debía expresarse en términos de las leyes de la mecánica newtoniana. De esa manera se trató de dar una teoría mecanicista de los fenómenos ópticos, del electromagnetismo, del calor, de las reacciones químicas, etc. Hemos visto cómo, a partir del estudio experimental de un gas perfecto, sintetizado en la fórmula $p \cdot v = R \cdot T$, mediante la hipótesis molecular, es posible desarrollar, mediante la mecánica, una teoría cinética de los gases y una interpretación del calor como agitación desordenada de las partículas. También hemos desarrollado la teoría de Einstein del movimiento browniano, la que constituye otro notable éxito de la mecánica aplicada a procesos de dinámica molecular.

El éter se inventó para mecanizar los fenómenos ópticos. Algunas de estas extrapolaciones dieron resultados positivos, como la explicación del calor por la agitación molecular y atómica, pero la mayoría de ellas contribuyó a desarrollos artificiales que más adelante condujeron a contradicciones y a resultados discrepantes con los datos de observación y experimentales.

4. CRISIS DE LA FISICA CLASICA. HACIA LA FISICA MODERNA

Las leyes mecánicas han sido determinadas para explicar el comportamiento de los cuerpos visibles a nuestro alrededor. Es, pues, sorprendente que hayan sido aplicadas con éxito al caso de la teoría cinética de los gases y del movimiento browniano. No debe sorprendernos que la mecánica clásica haya fracasado al querer explicar, por ejemplo, el movimiento de un electrón en torno a un núcleo atómico. La existencia de rayas espectrales nos obliga a admitir que los electrones se pueden mover en una serie de órbitas posibles separadas por bandas prohibidas. Esto es imposible de explicar dentro de los cánones de la mecánica clásica.

La física clásica admite en sus fundamentos el principio de Gottfried W. Leibniz (1646-1716) que expresa que la relación causa-efecto es continua; es decir, que una variación pequeña en la causa, producirá sólo un pequeño cambio en el efecto. La mayoría de nuestros experimentos diarios le dan un carácter muy plausible a este principio. Existen en física clásica algunos casos que al parecer contradicen el principio de Leibniz; por ejemplo, en los casos de puntos críticos.[62,63] Otro ejemplo en el que aparentemente no se cumple dicho principio es el siguiente: Si se arroja repetidas veces, en condiciones iguales, un dado cargado, los distintos resultados no son en general iguales debido a que variaciones pequeñísimas en el impulso con que se arroja, cambios pequeñísimos en la velocidad de rotación, etc., hacen que en vez de un número aparezca otro distinto; pero, si se determinan las frecuencias relativas de los diferentes resultados, encontraremos que estas frecuencias relativas, o las probabilidades, varían continuamente en función, por ejemplo, del desplazamiento del centro de gravedad respecto del centro geométrico del dado. El principio de Leibniz puede considerarse válido en general en física clásica si se lo expresa de manera que los cambios de los efectos se midan por sus respectivas probabilidades. El principio de Leibniz, modificado en la forma indicada, es válido también en física cuántica; es pues, un nexo entre la física clásica y la moderna.

Teóricamente, en física clásica es posible conocer la posición y velocidad de cada una de las partículas que forman un determinado sistema en un determinado instante y, de acuerdo con las leyes de la mecánica, se pueden expresar las posiciones y velocidades de cada partícula en un tiempo futuro o pasado. Esa es la base del determinismo absoluto de la física clásica. En realidad, es imposible, en general, poder determinar con precisión la posición y la velocidad de cada partícula de un sistema en un determinado instante y, consecuentemente, es imposible determinar con absoluta exactitud el futuro del mismo. El determinismo absoluto en física clásica es más bien un ingrediente metafísico que innecesariamente se le ha agregado. En efecto, no existe posibilidad instrumental para poder determinar las posiciones y correspondientes velocidades, en un determinado instante, de un gran número de partículas. Cuando la partícula considerada tiene el tamaño, por ejemplo, de un electrón, no es posible determinar con exactitud su posición y velocidad en un instante dado. Con gran aproximación podemos determinar la posición y la velocidad de una pelota o una piedra, pero cuando la partícula es suficientemente pequeña, no tiene sentido aplicarle las leyes de la mecánica clásica.

En el estudio de la realidad física es necesario valernos de instrumentos, entre los que se incluyen los órganos sensoriales del hombre, los que interactúan en el proceso estudiado. Esta interacción, en general, con cuerpos visibles para los que se crearon las leyes de la mecánica clásica, puede resultar despreciable. Pero cuando se desea conocer la velocidad y la posición de un electrón, la interacción de éste con el instrumento de medida no es despreciable, debido a que como mínimo se necesita la interacción de un fotón y éste es suficiente para perturbar los valores de la posición y la velocidad que el electrón tendría en el instante considerado. Como hemos indicado someramente, la física clásica se había construido admitiendo implícitamente que es posible observar y medir los diversos procesos naturales sin perturbarlos mediante la operación de medición. Esto constituye un postulado implícito de la física clásica. Un análisis del proceso de medición nos lleva a la conclusión de que tal postulado no es admisible en general.

Consideraciones de este tipo condujeron a W. Heisenberg (n. en 1901) a formular su famoso Principio de Incertidumbre que creemos deba quizás llamarse, para estar más de acuerdo con su contenido, Principio de Determinación de los Errores Inevitables. Heisenberg[33] demostró que no es posible conocer con absoluta precisión la posición y la velocidad de una partícula en el mismo instante.

En general para interpretar los resultados experimentales de los procesos atómicos y moleculares fue necesario hacer una revisión de los fundamentos de la física clásica, modificándolos de manera que se ajusten al veredicto de la observación y la experimentación. Por ese camino surgió la física cuántica.[6,23,24,31,39,46,58,64]

Por otra parte, en la física clásica había otro postulado implícito que se aceptaba sin discusión: el carácter absoluto del tiempo. Se ha visto (sección 5.2 del capítulo quinto) que el carácter absoluto que Newton le había dado al espacio, había sido suprimido por implicar una hipótesis metafísica, imposible de verificar dentro del esquema de la mecánica clásica. En cambio perduró el concepto de tiempo absoluto. Es decir, si en un sistema inercial sincronizamos un conjunto de relojes de mecanismo igual de manera que marchen al unísono, cuando estos relojes se colocan en distintos sistemas inerciales que se mueven entre sí, se admite, en mecánica clásica, que dichos relojes siguen indicando el mismo tiempo; o sea que la marcha de los relojes no depende de la velocidad con que se mueven con respecto a un sistema inercial. Basándonos en esto es que hemos puesto $t = t'$ en las ecuaciones correspondientes a todas las transformaciones galileanas [28].

Con el fin de mecanizar la óptica, es decir, reducir los fenómenos ondulatorios de la luz a procesos de propagación de ondas análogas a las acústicas, se había creado la hipótesis del éter, un medio que llenaba todo el espacio y al que se le atribuía las más fantásticas propiedades materiales: ser perfectamente elástico y ofrecer una resistencia nula al movimiento de los cuerpos materiales. El éter venía a constituir una materialización del espacio absoluto. Consecuentemente, la mecanización de los fenómenos ópticos condujo a la hipótesis del espacio absoluto, el que, como hemos dicho, era inaceptable dentro del esquema de la mecánica clásica. Por lo tanto, la hipótesis del éter introdujo una asimetría en física que a Einstein le desagradaba mucho: mientras la mecánica no admitía la existencia del espacio absoluto, éste se podía admitir en los fenómenos de propagación de luz. A. Michelson (1852-1931) y E. Morley (1838-1923)[5,36,41] realizaron un experimento fundamental para tratar de determinar la velocidad de la Tierra con respecto al éter. El resultado, interpretado correctamente por Einstein, puso término a la hipótesis del éter. No era posible mediante experimento alguno, mecánico u óptico, determinar la velocidad de un sistema inercial con respecto al vacío absoluto; por consiguiente, éste no tenía sentido físico. Haciendo un correcto ajuste de las nuevas hipótesis con los datos de observación y experimentales, Einstein emitió la hipótesis, plenamente probada por los múltiples resultados experimentales, conocida como el principio de la constancia de la velocidad de la luz, que expresa: las mediciones de la velocidad de la luz que se realicen en el vacío en cualquier sistema inercial S, arrojan siempre el mismo valor c, independientemente del valor de la velocidad uniforme que la fuente de luz tenga con respecto al sistema S.

Completando los estudios críticos de E. Mach (1838-1916) y H. Poincaré (1854-1912), Einstein (1878-1955)[6,22,28,36,37,41] modificó los postulados de la física de manera de interpretar en forma más ajustada los datos observacionales y experimentales. Consiguió no solamente vincular la mecánica a la óptica, sino también desterrar la hipótesis metafísica del tiempo absoluto y echar las bases a la Teoría de la Relatividad Restringida.

El proceso histórico de la física indica claramente que cuando una teoría científica entra en crisis (o sea que comienzan a aparecer resultados observables de ciertos procesos o experimentos, que no pueden ser explicados por la misma) debe hacerse un análisis crítico de los postulados con el fin de modificarlos o reemplazarlos por otros que se adecúen mejor a los resultados suministrados por la observación y la experimentación. Esta tarea no es fácil y muchas veces para hacer la reforma o transformación necesaria se requiere la inspiración de un genio.

BIBLIOGRAFIA

(1) ALONSO, M. y FINN, E. Fundamental University Physics, Vol. 1, Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967).

(2) BAEZ, A. Science Education --Improving the Teaching of Science with Particular Reference to Developing Countries, Advisory Committee on the Application of Science and Technology to Development, 8th session, October 1967.

(3) BABINI, J. Arquímedes, Espasa-Calpe, Buenos Aires (1948).

(4) BEDFORD, T. G. Practical Physics, Longmans, Green & Co., Londres (1926).

(5) BORN, M. Einstein's Theory of Relativity, Dover, Nueva York (1962).

(6) BORN, M. Atomic Physics, Blackie & Son, Londres (1935).

(7) BORN, M. Natural Philosophy of Cause and Chance, Dover, Nueva York (1964).

(8) BRIDGMAN, P. W. The Logic of Modern Physics, Macmillan, Nueva York (1958).

(9) BUNT, I. N. H. "Probability and Statistical Inference in the Secondary School", *Dialectica-Inter. Rev. Phil. Knowledge*, Vol. 21, Fasc. 1-4, pág. 366, Suiza (1967).

(10) CAJORI, F. A History of Physics, Macmillan, Nueva York (1924).

(11) CERNUSCHI, F. La Ciencia en la Educación Intelectual, Editorial Rosario, Rosario (1945).

(12) CERNUSCHI, F. Cómo Debe Orientarse la Enseñanza de la Ciencia, 2a. ed., Eudeba, Buenos Aires (1965).

(13) CERNUSCHI, F. y SIGNORINI, E. Enseñando Física Mediante Experimentos, Eudeba, Buenos Aires (1965).

(14) CERNUSCHI, F. y GRECO, F. Teoría de Errores de Mediciones, Eudeba, Buenos Aires (1968).

(15) CONSTANT, F. W. Física Teórica, Centro de Estudiantes de Ingeniería "La Línea Recta", Buenos Aires (1961).

(16) CHAMPION, F. C. University Physics, Part II, Blackie & Son, Glasgow (1946).

(17) DAMPIER, W. C. A History of Science and its Relations with Philosophy and Religion, Macmillan, Nueva York (1944).

(18) DOIG, P. A Concise History of Astronomy, Chapman, Londres (1950).

(19) EDDINGTON, A. The Philosophy of Physical Science, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1939).

(20) EDDINGTON, A. Space, Time and Gravitation, Harper & Brothers, Nueva York (1959).

(21) EDWARDS, H. Analitic and Vector Mechanics, McGraw-Hill, Nueva York (1933).

(22) EINSTEIN, A. e INFELD, L. The Evolution of Physics, Simon and Schuster, Nueva York (1942).

(23) FERMI, E. Introduzione alla fisica atomica, N. Zanichelli, Bolonia (1928).

(24) FEYNMAN, R., LEIGHTON, R. B. y SANDS, M. The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1964).

(25) FRANK, P. Foundations of Physics, Chicago Univ. Press, Chicago (1946).

(26) FRANK, P. Einstein, José Janés, Barcelona (1949).

(27) FRANK, P. Filosofía de la Ciencia, Editorial Herrero Hnos. Sucs., México (1965).

(28) GALILEI, G. Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano, Florencia (1632).

Dialogue Concerning the Two Chief World Systems--Ptolemaic & Copernican, Univ. of California Press, Berkeley (1962).

(29) GALILEI, G. a) Discorsi e dimostrazioni matematiche interno a due nueve science attenenti alla mecanica e i movimenti locali, Leiden (1638).
b) Diálogos Acerca de Dos Nuevas Ciencias, Losada, Buenos Aires (1945).
c) Dialogues Concerning Two New Sciences, McGraw-Hill, Nueva York (1963).

(30) GOLDSTEIN, H. Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1956).

(31) HAAS, A. Wave Mechanics and the New Quantum Theory, Constable, Londres (1928).

(32) HARRIS, N. Experiments in Applied Physics, McGraw-Hill, Nueva York (1963).

(33) HEISENBERG, W. The Physical Principles of the Quantum Theory, Univ. of Chicago Press, Chicago (1930).

(34) HOLTON, G. y ROLLER, D. Fundamentos de la Física Moderna, Reverté, Barcelona (1963).

(35) HOUSTON, W. Principles of Mathematical Physics, McGraw-Hill, Nueva York (1934).

(36) JAFFE, B. Michelson y la Velocidad de la Luz, Eudeba, Buenos Aires (1961).

(37) KACSER, C. Introduction to the Special Theory of Relativity, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Nueva Jersey (1967).

(38) LEECH, J. Classical Mechanics, Methuen, Londres (1958).

(39) LEITE L. J. Introdução a Teoria Atomica da Materia, Instituto Brasileiro de Bibliografia e Documentação, Rio de Janeiro (1957).

(40) LINDSAY, R. B. Introduction to Physical Statistics, Wiley, Nueva York (1941).

(41) LOEDEL, E. Física Relativista, Kapelusz, Buenos Aires, (1955).

(42) MACH, E. Science of Mechanics, Open Court, Chicago (1919).

(43) MACH, E. La connaissance et l'erreur, Flammarion, París, (1919).

(44) MAGIE, W. F. A Source Book in Physics, McGraw-Hill, New York (1935).

(45) MOULTON, F. R. y SCHIFFERES, J. J. Autobiografía de la Ciencia, Fondo de Cultura Económica, México (1947).

(46) PAULING, L. y WILSON, E. B. Introduction to Quantum Mechanics with Application to Chemistry, McGraw-Hill, Nueva York (1935).

(47) PEARSON, K. Gramática de la Ciencia, Daniel Jorro, Madrid (1909).

(48) PLA, C. Galileo Galilei, Su Vida, Su Obra, Espasa-Calpe, Buenos Aires (1942).

(49) POINCARE, H. La science et l'hypothese, Flammarion, París (1912).

(50) POINCARE, H. La valeur de la science, Flammarion, París (1913).

(51) POINCARE, H. Science et méthode, Flammarion, París (1947).

(52) RESNICK, R. y HALLIDAY, D. Physics for Students of Science and Engineering, Wiley, Nueva York (1962).

(53) ROGERS, E. Physics for the Inquiring Mind, Princeton Univ. Press, Princeton (1966).

(54) ROGERS, E. Teaching Physics for the Inquiring Mind, Princeton Univ. Press, Princeton (1962).

(55) RUSSELL, B. Misticismo y Lógica, Paidos, Buenos Aires (1949).

(56) SANTALO, L. Geometrías No Euclidianas, Eudeba, Buenos Aires (1961).

(57) SARTON, G. Introduction to the History of Science, Carnegie Institution, Baltimore (1947/1950).

(58) SEMAT, H. Introduction to Atomic and Nuclear Physics, 3a. ed., Rinehart, Nueva York (1960).

(59) SOMMERFELD, A. Thermodynamics and Statistical Mechanics, Academic Press, Nueva York (1956).

(60) SYMON, K. Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1960).

(61) SYNGE, J. L. y GRIFFITH, B. A. Principles of Mechanics, McGraw-Hill, Nueva York (1959).

(62) WANGSNESS, R. K. Introduction to Theoretical Physics, Wiley, Nueva York (1963).

(63) WEBER, R., WHITE, M. y MANNING, K. Física para Ciencia e Ingeniería, McGraw-Hill, Nueva York (1965).

(64) WEHR, M. R. y RICHARDS, J. A. Physics of the Atom, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1960).

(65) WEYL, H. Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton Univ. Press, Princeton (1949).

COLECCION DE MONOGRAFIAS CIENTIFICAS

Publicadas

Serie de Matemática

N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
N° 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
N° 5. Algebra Lineal, por Orlando E. Villamayor.
N° 6. Álgebra Lineal e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.

Serie de Física

N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
N° 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.

Serie de Química

N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y Moisés Burachik.
N° 4. Mecanismo de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.

N° 5. Ele ntos F lenados, por Jacobo Gómez Lara.

Serie de Biol

N° 1. a Genét la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo F ota-Pessoa.
N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.

En preparación

Serie de Matemática

Funções Reais de Variável Real, por Djairo Guedes de Figueiredo.
Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.

Serie de Física

Física Nuclear, por Mariano Bauer E. y Alfonso Mondragón.
Fôrças Nucleares, por Oscar Sala y A. F. R. de Toledo Piza.

Serie de Química

Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.

Serie de Biología

Hereditariedade Humana, por P. H. Saldanha.

Nota. Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la División de Ventas y Promoción, Unión Panamericana, Washington, D. C., 20006.